Aritmética

Introducción

Números Naturales: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ (para algunos autores $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$)

Números Enteros: Es el conjunto de números naturales, agregándole sus negativos, $\mathbb{Z} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Por simplicidad, sólo diremos número en lugar de decir número entero.

Bautizo: Decimos **a** ***divide*** a **b** (**a** ***factor*** de **b**, **a** es ***divisor*** de **b**, **b** es ***múltiplo*** de **a**, **b** es ***divisible*** por **a**) si existe un entero **c** tal que **b=ac**. Lo anterior se simboliza como $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$, en caso de que **a** no divida a **b**, se simbolizará como $\mathbf{a} \nmid \mathbf{b}$.

De la definición anterior se pueden deducir las siguientes propiedades:
Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b+c$
Si $a \mid b$ entonces $a \mid bc$
Si $a \mid b$ y $a \mid b+c$ entonces $a \mid c$
(Propiedad reflexiva) $a \mid a$
(Propiedad Transitiva) Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$

P1: ¿Cuándo se cumple la Simetría? $a \mid b$ y $b \mid a$
P2: ¿Si $a \mid b+c$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.
P3: ¿Si $a \mid bc$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$?
P4: ¿Si $\mathbf{a} \mid \mathbf{b+c}$ y $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{a} \mid \mathbf{c}$?

Observación: Es conveniente hacer notar que el símbolo | NO es el símbolo de división, sino un símbolo de relación, así pues, aunque la división $0/0$ no está definida, podemos decir que 0 | 0, ya que existe un entero (de hecho, cualquier entero) que cumple que 0c=0.

A1: (G1) Encuentra los valores de a, tales que $\mathbf{0} \mid \mathbf{a}$
A2: (G1) Encuentra los valores de a, tales que $\mathbf{a} \mid \mathbf{0}$
A3: (G1) ¿Para que valores de n se cumple que $n-2 \mid n+2$?
A4: (G1) ¿Para que valores de n se cumple que $n-2 \mid n^2-3$?
A5: (G1) ¿Para que valores de n se cumple que $3 \mid n^2-2$?
A6: (G1) ¿Para que valores de n se cumple que $n-2 \mid 2n$?
A7: (G1) Si a es un entero impar. Probar que a^2-1 es divisible por 8.
A8: (G1) Si a es un entero impar. Probar que a^4-1 es divisible por 16.
FO6-5: Pruebe que el número de tres cifras decimales aba es divisible entre 3 si y sólo si a-b es múltiplo de 3.
P5: Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $x+y=xy$.

FO7-20: Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1992}$

Números Primos

Bautizo: Un número es **primo** si y solamente si tiene cuatro diferentes divisores.

Observaciones: El 1 y el -1 tienen sólo dos divisores (el 1 y el -1), por lo cual no son primos. Como cualquier número divide al cero, tiene más de 4 divisores, entonces no es primo. Los divisores *triviales* de un número n son 1, -1, n y $-n$. Como cualquier número diferente del 1 y -1, tiene al menos 4 divisores (los *triviales*), un número no es primo si tiene un divisor no *trivial.*
Tres bautizos:
A los números 1 y -1 se les llama **unidades**.
Un número entero, que no es unidad y no es primo se llama **compuesto**.
A una pareja de números a y b se les llama **coprimos** o **primos entre sí** o **primos relativos** si satisfacen que $d\,|\,a$ y $d\,|\,b \Rightarrow d=1$ o $d=-1$.

Teorema Fundamental de la Aritmética: Todo entero, distinto de **1** o de **-1** puede ser expresado, como producto de números primos. Si además el número es distinto de cero esta expresión es única, excepto por el orden.

Proposición: Todo entero distinto de 1 y -1 es divisible por un número primo. (Sugerencia: ¿Qué pasaría si no fuera cierto?).

Proposición: Hay una cantidad infinita de primos. (Sugerencia: Si no fuera cierto, ¿es primo el resultado de la suma de 1 con el producto de todos los primos?)

JIC1: ¿ $n!+1$ es primo?
B1: (G1) Todo primo de la forma $3k+1$ es de la forma 6k+1.
B2: (G1) Prueba que hay una infinidad de primos de la forma $4k+3$ y $6k+5$.
B3: (G1) Prueba que sólo hay una terna de primos positivos impares consecutivos.
B4: (G1) Sea p_n el n-ésimo primo, prueba que $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$ no es un cuadrado.
B5: (G1) Probar que para todo n existen n enteros consecutivos compuestos. (Sugerencia: ¿Qué pasaría si el primero de estos número fuera $(n+1)!+2$?)
B6: (G1) Si 2^n-1 es primo entonces n es 2 o n es impar.
B7: (G1) Si 2^n-1 es primo entonces n es primo.
B8: (G1) Si 2^n+1 es primo entonces n es potencia de 2.
B9: Probar que todo entero de la forma $4m+3$ tiene un número impar de factores de la forma $4m-1$.
B10: Probar que si t es entero mayor a uno, el número $t^{4m}+t^{2m}+1$ nunca es primo.
OMM-DF-V-3: Encuentra todos los números enteros *a*, *b*, mayores o iguales que cero, que satisfacen: $2^a \cdot 3^b = 2^{ab} + b^3$.
OMM-AGS-VI-4: Demuestre que $8n\ \ n^2+5$ es divisible entre 48 para todo $n \in \mathbb{N}$.

FO7-4 Determina todos los pares de enteros positivos (a,b) tales que $a+b\le 100$ y que satisfacen $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$.

FO5-27: Prueba todos los enteros 1573, 157573, 15757573, etc. son compuestos.

Algoritmo de la División y Residuos

Teorema: Si a y b son enteros, $b\neq 0$, entonces existen dos enteros q y r, únicos, tales que $a=bq+r$, $0\le r<|b|$.

C1: El resto de la división de un número al dividirlo por 4 es 3 y el resto de la división del mismo número al dividirlo por 9 es 5. Encontrar el resto de la división del mismo número entre 36.

C2: Sean a y b enteros, $b\neq 0$. Si $a-b=175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, hallar a y b.

Bautizo: Denotaremos por $r_b(m)$ el resto de la de m por b.

C3: $r_b(m+n)=r_b(r_b(m)+r_b(n))$

C4: $r_b(m\cdot n)=r_b(r_b(m)\cdot r_b(n))$

Proposición: Si a, b y c son números naturales diferentes de cero, entonces $a=b\cdot c$ implica que $a\ge b$ y $a\ge c$. (Sugerencia: $1\le b$ y $1\le c$).

Proposición: Si $a\in \mathbb{Z}-\{-1,0,1\}$ y a no es primo, existe b, tal que $1<b<|a|$ y $b\,|\,a$.

Bautizo: Se dice que dos enteros a y b son congruentes, módulo m, si m divide a la diferencia $a-b$. $\left(a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow m\,|\,a-b\right)$.

Propiedades:

a) $a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)$
b) Si $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)$
c) Si $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ y $b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow a\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)$
d) Si $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ y $c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow a\pm b\equiv c\pm d\ (\mathrm{mod}\ m)$ y $ab\equiv cd\ (\mathrm{mod}\ m)$
e) Si $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ con $0\le a<m$ y $0\le b<m$, entonces $a=b$.
f) Si $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ con $0\le a<m$ y $0\le b<m$, entonces $a=b$.

C5: (G1) Demuestra que:

a) $17\,|\,3^{4n+2}+2\cdot 4^{3n+1}$
b) $11\,|\,2^{2n-1}\cdot 3^{n+2}+1$
c) $64\,|\,3^{2n+2}-8n-9$
d) $288\,|\,7^{2n+1}-48n-7$
e) $17\,|\,3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$.
f) $11\,|\,5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$.
g) $3\,|\,4^{n}-1$
h) $11\,|\,3^{2n+2}+2^{6n+1}$

C6: Sean m y n enteros. Demuestra que si $7 | m^3 + n^3 + p^3$ entonces $7 | mnp$.

C7: Sean m y n enteros. Demuestra que si $7 | m^2 + n^2$ entonces $7 | m$ y $7 | n$.

C8: Sean m y n enteros. Demuestra que si $7 | m^2 + 2n^2$ entonces $7 | m$ y $7 | n$.

C9: Sean m y n enteros. Demuestra que si $7 | m^2 + 4n^2$ entonces $7 | m$ y $7 | n$.

C10: Sean m y n enteros. Demuestra que si $7 | m^4 + n^4$ entonces $7 | m$ y $7 | n$.

C11: Sean a y b enteros, entonces $a^3 - b^3$ es divisible por 11 si, y sólo si, $a - b$ es divisible por 11.

C12: Obtén criterios de divisibilidad para los números del 2 al 11.

C13: Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de enteros, probar que siempre es posible extraer una subsucesión $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_k$, $1 \le m \le k \le n$, cuya suma es divisible por n. (Sugerencia: Analiza los restos de los n números $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

C14: Sean a, b y c enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Prueba que:

a) a o b es par.
b) a o b es divisible por 3.
c) a o b o c es divisible por 5.
d) a o b es divisible por 4.

C15: Prueba que ningún entero positivo de la forma $8k + 7$ puede expresarse como la suma de tres cuadrados enteros.

C16: Sean p y q primos distintos, ambos mayores a tres. Probar que si $p - q$ es una potencia de 2, entonces p+q es divisible por 3.

C17: Si a es impar y no es múltiplo de 3 ni de 5, entonces $240 | a^4 - 1$.

C18: Halla los enteros m tales que $13 | (15m + 14)^{18}$.

C19: Si p es un número primo, $p > 3$, entonces $p^2 = 24m + 1$ para algún entero m.

Bautizo: El **máximo común divisor** de dos números a y b, (a,b) o $mcd(a,b)$, se define como el máximo entero con la propiedad de que divide a a y divide a b.

C20: Si $d | a$, $d | b$ y existen *u* y *v* tales que $d = ua + vb$ entonces $d = (a,b)$.

C21: Si a, b, c, d y k son enteros. Demuestra que:

a) $(a,b,) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1, d \neq 0$
b) $(a,b) = d \Rightarrow (ka,kb) = |k| d$
c) $(a, b + ka) = (a,b)$
d) $(a,b) = d$ y $(c,b) = 1 \Rightarrow (ac, b) = d$

Teoremón: Si $(a,b) = d$, entonces existen enteros u y v tales que $(a,b) = ua + vb$.

C22: Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $(a,a) = \ldots$

C23: Si $a,b \in \mathbb{Z}$, entonces $(a,a) = b$ si, y sólo si …

C24: $(a,b) = ab$ si, y sólo si …

C25: $(a,b) = 1$, $a | c$ y $b | c$ implica $ab | c$. (Sugerencia: , además c=ak, y c=bm, multiplica por c la primera ecuación y haz las sustituciones adecuadas).

C26: $(a,b) = |ab|$ si, y sólo si …

C27: Sean a y b enteros primos relativos. Calcula todos los valores posibles de $m=(3a-b,\ 2a+b)$. (Resultado 1 y 5)
C28: Sean a y b enteros primos relativos. Calcula todos los valores posibles de $m=(2a-5b,\ 4a+3b)$. (Resultado 1, 2, 13, 26)
C29: Expresa el máximo común divisor de cómo combinación lineal:
a) 228 y 348 b) 15 y 21 c) 2n+1 y 4n d) $4n^2$+2n-40 y 2n+7

Teoremas muy importantisisisisísimos para divisibilidad:
Si **a|bc** y **a** es primo, entonces **a|b** ó **a|c**.
Si **a | bc** y **a** es coprimo con **b**, entonces **a|c**.

Bautizo: $m=[a,b]$ es el **Mínimo común Múltiplo** de los enteros a y b, si y sólo si cumple las dos condiciones:
1) m es múltiplo de a y b.
2) Si k es múltiplo de a y b entonces $m \le |k|$.

C30: Si $a \in \mathbb{Z}$, entones $[a,a] = \ldots$
C31: Si $a,b \in \mathbb{Z}$, entones $[a,b] = b$ si, y sólo si …
C32: $(a,b) = [a,b]$ si, y sólo si …
C33: $[a,b] = |ab|$ si, y sólo si …
C34: Demuestra que $[[a,b],c] = [a,[b,c]]$
C35: $c > 0$ implica $[ac,\ bc] = [a,\ b]c$
C36: Si $d > 0$, $d \mid a$ y $d \mid b$ entonces $\left[\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d}\right] = \dfrac{[a,b]}{d}$
C37: Si $a \mid k$ y $b \mid k$, $a \neq 0 \neq b$ implica que $[a,b] \mid k$
C38: Sea $m = \dfrac{|ab|}{(a,b)}$.
a) $[a,b] \mid m$
b) $m \mid [a,b]$ (Sugerencia: (a, b) es una combinación lineal de a y b).
c) $[a,b](a,b) = ab$

Ecuaciones Diofantinas (Diofánticas)

Súper Proposición: Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax+by=c, \quad a,b,c$ enteros, tenga solución en enteros, es que el máximo común divisor de a y b divida a c.

Otra súper proposición: El conjunto de soluciones enteras x, y de la ecuación $ax+by=c, \quad a,b,c$ enteros, es de la forma $x = x_0 + u$; $y = y_0 + v$ en donde x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación $ax+by=c,$ y u, v son solución de las ecuación homogénea asociada $ax+by=0$

Otra más: Sean a, b y c enteros tales que a y b no son ambos ceros, supongamos además que $d = (a,b)$ divide a c. Sea $a = da'$, $b = db'$. Entonces el conjunto x, y de soluciones enteras de la ecuación $ax+by=c$ es $x = x_0 - b't$, $y = y_0 + a't$ donde t es un entero arbitrario y x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación $ax+by=c$.

Congruencias Lineales

Teorema: Si $d = mcd(a,n)$, entonces $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene solución si, y sólo si $d \mid b$. Si tiene solución y x_0 es una solución particular de la congruencia, la solución general es $x = x_0 + k\,n$, donde k es cualquier entero.

Cuatros propiedades que ayudan a resolver congruencias

1: Si $m \mid a,\ m \mid b\ y\ m \mid n$ entonces $ax \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{a}{m}x \equiv \frac{b}{m} \pmod{\frac{n}{m}}$.

2: Si $mcd(a,\ n) = 1,\ \ m \mid a\ $ y $\ m \mid b$ entonces $ax \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{a}{m}x \equiv \frac{b}{m} \pmod{n}$.

3: Si $mcd(c,\ n) = 1$ tienen mismas las soluciones $ax \equiv b \pmod{n}$ y $acx \equiv bc \pmod{n}$.

4: Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ y $ax \equiv b \pmod{n}$ entonces

$ax \equiv b \text{ mod}(p_1^{\alpha_1}),\ ax \equiv b \text{ mod}(p_2^{\alpha_2}), \ldots, ax \equiv b \text{ mod}(p_t^{\alpha_t})$

Teorema Chino del Residuo: Si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son primos relativos dos a dos, entonces las congruencias $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \ldots, x \equiv a_k \pmod{m_k}$ tiene solución común.

Soluciones del Teorema Chino del Residuo: Sea $t_i = \dfrac{\prod_{j=1}^{k} m_j}{m_i}$, x_i tal que $1 \le x_i < m_i$ y

$t_i x_i \equiv 1 \text{ mod}(m_i)$. $t = a_1 x_1 t_1 + \ldots + a_n x_n t_n \left(\text{mod} \prod_{i=1}^{k} m_i \right)$ es solución del sistema de congruencias y es única en el intervalo $\left[\ 0, \prod_{i=1}^{k} m_i - 1 \right]$.

C27: Sean a y b enteros primos relativos. Calcula todos los valores posibles de $m=(3a-b,\ 2a+b)$. (Resultado 1 y 5)

C28: Sean a y b enteros primos relativos. Calcula todos los valores posibles de $m=(2a-5b,\ 4a+3b)$. (Resultado 1, 2, 13, 26)

C29: Expresa el máximo común divisor de cómo combinación lineal:

a) 228 y 348 b) 15 y 21 c) 2n+1 y 4n d) $4n^2+2n-40$ y 2n+7

D1) Encuentra todas las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofantinas:

a) $15x+21y=300$

b) $228x-348y=1368$

c) $1242x+1476y=90$

d) $(4n+1)x+2ny=n$

e) $(2n+1)x+4ny=n$

P1) Un objeto cuesta $19.00, pero el comprador sólo tiene monedas de $3.00 y la vendedora sólo tiene monedas de $5.00. ¿Puede hacerse la compra? En caso afirmativo, ¿cómo se haría? (Perelman, Álgebra Recreativa).

P2) Se deben gastar $100.00 en la compra 40 timbres postales de $1.00, $4.00 y $12.00. ¿Cuántos se deben comprar de cada uno? (Perelman, Álgebra Recreativa).

D2) Resuelve las (los) siguientes (sistemas de) congruencias:

a) $16x-9\equiv 0 \pmod{35}$

b) $200x+315\equiv 0 \pmod{441}$

c) $(2n+1)x+7\equiv 0 \pmod{4n}$

d) $(3n-2)x+5n\equiv 0 \pmod{9n-9}$

e) $\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{3} \\ x\equiv 0 \pmod{8} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{25} \\ x\equiv 7 \pmod{35} \end{cases}$

g) $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{17} \\ x\equiv 4 \pmod{21} \\ x\equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$

FO6-1: Halle los enteros positivos $n>2$, que cumplan las cuatro condiciones:

i) $2 \mid n$ ii) $3 \mid n+1$ iii) $4 \mid n+2$ iv) $5 \mid n+3$

FO6-24. Una compañía de *n* soldados es tal que:

1) *n* es un número capicúa (es decir, se lee de la misma manera al derecho y al revés, por ejemplo, 12421 ó 523325)
2) Si los soldados se forman
   - i) de 3 en 3, quedan 2 soldados en la última fila,
   - ii) de 4 en 4, quedan 3 soldados en la última fila,
   - iii) de 5 en 5, quedan 5 soldados en la última fila,

a) ¿Cuál es el mínimo número *n* tal que se satisfacen (1) y (2)?

b) ¿Demuestre que hay un infinidad de números *n* que satisfacen (1) y (2).

P3) Encuentra un número que al dividirse por 10 deja residuo 10, al dividirse por 9 deja residuo 8 y así sucesivamente hasta que al dividirse por dos deje residuo 1.

P4) Cifré un mensaje utilicé lo siguientes valores para las letras (0 para el espacio):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

Si una letra tenía el valor x le aplique la fórmula 4x+2010=z mod(27), luego sustituí la letra por la correspondiente a z obteniendo:

```
GULFPLMENKELNRLVUENGPLZOELFPGLJPKEJPKUXPGLGRNLGUJVFEGLEGLGRFRLVRCZOELNRLGELAPNLXOENKPLAE
LFRLXRJVFUXPAPLZOELEGLFPLSUAPLYRQNLSRNLNEOJPNN
```

Descifra el mensaje.

BASES

1)
(a) Escribe 321_5 en base 8.
(b) Suma $42167_7 + 113667_7$. Conserva el resultado en base 7.
(c) Multiplica $42169_9 \times 113669_9$. Conserva el resultado en base 9.
(c) Si d es un dígitos del número $4d763_8$, el cual es múltiplo de de 7, ¿cuál es el valor de d?
(Art of Problem Solving Online Classes).

2) ¿Para qué valores b los números 47_b y 35_b son primos relativos?

3) ¿ Para qué valores b $aa_b = a^2$ con $a \neq 0$?

4) Si n es un entero positivo mayor a 1 y a_r es el número r en base n. Prueba que el número es un entero al cuadrado para toda (FO6-12)

5) La cifra de las unidades de 14n es 2 si se expresa en base 12, ¿cuál es la cifra de las unidades de n en base 6? (Art of Problem Solving Online Classes)

6) N es un entero cuya representación en base b es 777. Encuentra el menor entero positivo b para el cual N es la cuarta potencia de un entero. (Canadian MO 1977-3)

Teorema de Dirichlet: Si a y b son primos relativos entonces hay una cantidad infinita de primos de la forma $ak+b$. (La demostración de este teorema la puedes encontrar en http://paraisomat.ii.uned.es/archivos/tnumeros/ap_dirichlet.zip).

Chisme: El Teorema de Dirichlet fue conjeturado por Gauss (considerado por varios como el matemático más grande de historia) y demostrado por Dirichlet en 1837. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nació en Düren, Alemania, en 1833 y murió el año de 1877 en Gotinga, Alemania. Su nombre, Lejeune Dirichlet, deriva de que su familia era de Richlet, una población de Bélgica, y $\text{Lejeune Dirichlet} \approx \text{"le jeune de Richelet"} = \text{"el joven de Richelet"}$. Sus principales aportaciones fue en el área de Teoría de Números. Su primera publicación trató sobre el Teorema de Fermat, donde demostró su veracidad para $n=5$, tiempo después lo demostró para $n=14$. Chisme de lavadero: Se caso con la hermana de Félix Mendelssohn, el autor de la célebre Marcha Nupcial.

B3: (G1) Prueba que hay una infinidad de primos de la forma $4k+1$.

B7: (G1) Prueba que no existe ningún polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros a_i y $n \geq 1$, tal que $f(m)$ sea primo para toda m.

Bautizos:

El número $F_n = 2^{2^n} + 1$ se llama **número de Fermat de orden n**.

Si $F_n = 2^{2^n} + 1$ es primo se dice que es un **Primo de Fermat**

B11: Probar que si $n \neq m$, entonces F_n y F_m son primos relativos.

B12: Probar inductivamente que si p_n es el n-ésimo primo, entonces $p_n \leq 2^{2^{2n-1}}$

Postulado de Bertrand: Si n>1, entonces existe siempre un primo p que satisface $n < p < 2n$.

B13: Usar el Postulado de Bertrand para probar que $p_n < 2^n$, $n > 1$, donde p_n es el n-simo primo.

Chisme: Joseph Louis François Bertrand (1800-1900) fue un profesor nacido en París. La conjetura la realizó en 1845, comprobando el resultado para cada entero n entre 2 y 6,000,000.
El resultado fue demostrado por primera vez por el matemático ruso P.L. Chebychev en 1850. Una demostración de Paul Ërdos, uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, la cual descubrió a los 18 años la puedes encontrar en: http://usuarios.lycos.es/teoriadenumeros/bertrand.html.

(C18) Sea A un número escrito en forma decimal, forma los números $A_1 = A, A_2 = AA, A_3 = AAA, \ldots$ repitiendo las cifras de A. Demuestra que si m es un entero coprimo con 10, entonces m divide a una infinidad de números A_n.

e) Hallar todas las ternas coprimas $a, b, c \in N$, tales que $a^2 + b^2 = c^2$.

(Respuesta: $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$, donde x e y recorren todos los enteros que satisfacen: $0 < y < x$, $(x, y) = 1$, x e y son de distinta paridad.)

A9: (G1) Prueba que 1 sumado al producto de dos enteros impares consecutivos o de dos enteros pares consecutivos es un cuadrado.
A10: (G1) Prueba que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado.
A11: (G1) Prueba que para todo entero no negativo n, $\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n$ es entero un divisible por 2^n.

Para los ejercicios A4 al A14, se sugiere usar Inducción Matemática.

Para los siguientes ejercicios puedes suponer que el coeficiente binomial es entero, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A24: (G1) Sean m, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos tales que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = m$, prueba que $\dfrac{m!}{a_1!a_2!\ldots a_n!}$ es un entero no negativo.

A25: (G1) Prueba que $(n!)^2$ divide a $(2n)!$, y que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ es par.

A26: (G1) Prueba que si dos números son suma de dos cuadrados, entonces su producto es también la suma de dos cuadrados.

A27: (G1) Sea $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ la aplicación definida por $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n es par, $f(n) = 3n+1$ si n es de la forma $n = 4k+1$ y $f(n) = 3n-1$ si n es de la forma $n = 4k+3$. Probar que para todo $n \in \mathrm{N}$ existe $i \in \mathrm{N}$ tal que $f^i(n) = 1$. ($f^i(n)$ significa la composición de f^i en sí misma i veces.

A28: (G1) Sea $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ la aplicación definida por $f(n) = \dfrac{n}{3}$ si n es divisible por tres, $f(n) = 2n+1$ si n es de la forma $n = 3k+1$ y $f(n) = 2n-1$ si n es de la forma $n = 3k+2$. Probar que para todo $n \in \mathrm{N}$ existe $i \in \mathrm{N}$ tal que $f^i(n) = 1$.

Chisme: Algoritmo de Siracusa

Sea $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ la aplicación definida por $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n es par, y $f(n) = 3n+1$ si n es impar. Probar que para todo $n \in \mathrm{N}$ existe $i \in \mathrm{N}$ tal que $f^i(n) = 1$.
Este algoritmo también es conocido como: Problema $3x+1$, Algoritmo de Hasse, Problema de Kakutani, Problema de Siracusa, Conjetura de Thwaites, Problema de Ulam.
Thwaites en 1996 ofreció una recompensa de £1000 a quien lo resolviera. Hasta el momento se ha probado sólo para los números naturales n tales que $n \leq 3 \cdot 2^{53}$.

A29: (G1) Prueba que $(m!)(n!)$ es divisible por $(n)! \cdot (m)! \cdot (m+n)!$.

FO5-13) Si m y n son enteros positivos con $(n, m) = 1$, demuestra que $\dfrac{(m+n-1)!}{m!n!}$ es entero. (Sugerencia: $\begin{pmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ son enteros)

C24: $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ es divisible por n+1.

A9: (G1) Si a es un entero impar. Probar que $a^{2^n} - 1$ es divisible por 2^{n+2}.

Lld) Si a y m son primos relativos entre sí, entonces la congruencia $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ tiene solución. Además si x_1 y x_2 son soluciones, entonces $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$.
Lle) La congruencia $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ tiene solución si y sólo si el máximo común divisor de a y m divide a b.

FO5-14) Encuentra las parejas a, b de enteros positivos tales que $[a, b] = 80$.
FO5-16) Encuentra todas las ternas de enteros $0 < a < b < c$ tales que la suma de sus recíprocos es un entero.
FO5-19) Encuentra n, el menor múltiplo positivo de 1991, tal que el producto de sus divisores sea igual a n^{1991}.
FO5-20) Sea a un entero positivo con la propiedad de que si p es un primo que lo divide entonces también es divisible por p^2. Demuestre que tal número es de la forma $a = q^2 r^3$ con q, r enteros.
FO5-21) Para que enteros n sucede que, n divide a $(n-1)!$.
FO5-28) Encuentra todos los números naturales que se pueden escribir de la forma $3n + 35m$ con n y m enteros positivos.
F05-29) Encuentra todos los enteros n con la propiedad de que el conjunto $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+10\}$ puede ser partido en dos subconjuntos tales que la suma de los números en uno de ellos, es igual a la suma de los números del otro.
F05-30) Determine los enteros positivos a con la propiedad de que el conjunto $M(a) = \{b; b \in N \ \ y \ \ a + b \mid ab\}$, tiene un único elemento.
F05-31) Prueba que el máximo común divisor de $2^n - (-1)^n$ y $2^{n-1} - (-1)^{n-1}$ es igual a 3 para todo n mayor o igual a 2.
F05-33) Prueba que si $A \subset N$ y A tiene tres elementos entonces existen i, j en A tales que 10 divide a $i\, j(i + j)(i - j)$.
F05-35) Encuentra todos los números naturales a, b, c, d tales que el producto de cualesquiera dos de ellos sumado con el producto de los otros dos restantes sea igual 1990.
B16: Probar que el cubo de todo número entero es la diferencia de dos cuadrados enteros. (Sugerencia: $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$).

FO6-8.
En cualquier colección de 7 o más enteros siempre hay dos cuya suma o diferencia es divisible por 11.

FO6-13
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea el número de divisores de n. Determine n tal que
–

FO6-27
La suma de los cuadrados de dos números consecutivos puede ser un cuadrado perfecto, por ejemplo,

a) Pruebe que la suma de los cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para y 6.
b) Encuentre un ejemplo de 11 números positivos consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado perfecto.

OMM-DF-V-2
Si *n* es un entero no divisible por 5, es decir n es de la forma 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, para algún entero k, demuestre que al dividir por 5, el residuo es cero.

OMM-DF-V-3
Un rey muy celoso del honor de su hija tiene a 1000 soldados numerados del 1 al 1000 para cuidarla.
El primer día del mes los 1000 soldados están de guardia, el segundo día descansan los de número par, y a partir de ahí, el día i descansan todos los guardias que trabajaron el día anterior más aquellos cuyo número es divisible por i.
Ahora bien, el novio de la princesa halló una manera de burlar la vigilancia de los guardias y visitarla si el número de soldados que la vigilan es menor de 401.
¿En cuáles días de los primeros 10 días del mes logra el novio visitar a la princesa?

OMM-JAL-V-4
Sean x, y, z números enteros tales que $x^3 + y^3 + z^3$ es múltiplo de 7. Demuestre que cada uno de ellos es múltiplo de 7.

OMM-JAL-V-6
Pruebe que si a, b, c y n son números enteros cualesquiera con n mayor que tres, entonces hay un entero k tal que ninguno de los enteros $k+a, k+b, k+c$ es divisible por n.

OMM-JAL-V-9
Dados tres números enteros positivos a, b y m, con m mayor que 1. Demuestre que

$$(m^a - 1, m^b - 1) = m^{(a,b)} - 1.$$

Nota: Los paréntesis denotan el máximo común divisor de los números separados por la coma.

OMM-COA-V-4
Considérese al conjunto *S* de los números naturales que son el producto de los dígitos de algún otro número natural. Por ejemplo $24 \in S$ porque es el producto de los dígitos de 38 (o bien, 83, 64, 46) y $19 \notin S$.

a) Demuestre que $1989 \notin S$.
b) Demuestre que $2688 \in S$
c) ¿cuál es el número más pequeño que genera a 2688?

OMM-DGO-V-5

Sea $P\ \ X,Y\ \ =2X^2-6XY+5Y^2$. Diremos que un número entero *A* es un valor de *P* si existen números *B* y *C* tales que $A=P\ \ B,C$.

i) Determinar cuántos elementos de $1,2,3,\cdots,100$ son valores de *P*.

ii) Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

OMM-DGO-V-3

Sea $S=\ 1,2,3,\cdots,280$. Halle el menor número natural n tal que en cualquier subconjunto de S con n elementos hay 5 números que son primos entre si dos a dos.

OMM-DGO-V-4

Sea G un grafo conexo con k aristas. Demuestre que es posible numerar las aristas de G de 1 a k de tal manera que para cada vértice de G que pertenece a dos o más aristas, el máximo común divisor de los números asignados a esas aristas es 1.

[Un *grafo* es un conjunto de puntos llamados vértices y un conjunto de aristas que unen pares de vértices distintos. Cada par de vértices distintos x, y tiene a lo más una arista que los une. El grafo G es conexo si para cada par x, y de vértices distintos existe una sucesión de vértices $x\ \ x=\vartheta_0,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\cdots,\vartheta_m=y$, tal que cada para $\vartheta_i,\ \vartheta_{i-1},\ 0\le i<m$, está unido por una arista de G].

FO7-2

Sean a, b, c enteros positivos tal que a y b son impares. ¿Cuál es el residuo de al $3^a+\ \ b-1\ ^2 c$ dividirlo por 4?

FO7-5

Encuentre cinco enteros menores o iguales que $1992\cdot 35$ tales que tengan al menos 100 divisores.

FO7-8

Determine todas las parejas de enteros $x,\ y$ que satisfagan:

$$x^2-4x+3\ ^{x-3y}=1$$

FO7-12

Sea p un número primo. Demuestre que si $\cdots,a_1,a_{i+1},\cdots,a_{i+p-1}\cdots$ están en progresión aritmética y d es la diferencia entre sus términos, entonces p divide a d o p divide a uno de los a_{i+k} con $k=0,1,\cdots,p-1$.

FO7-13

Demuestre que 1992 divide a uno (y por lo tanto a una infinidad) de los números de la forma $10^{n_1}+10^{n_2}+\cdots 10^{n_k}$, $0\le n_1<n_2<\cdots<n_k$.

FO7-25

Pruebe que: $10^{10}+10^{10}+\cdots 10^{10^r} \equiv 0 \mod 7 \iff r \equiv 0 \mod 7$

FO7-29

Un número natural n se dice abundante si la suma de sus divisores (incluido n) es mayor que $2n$. Pruebe que todo número para mayor que 46 se puede expresar como suma de dos números abundantes

OMM-SEL-VI31

Sea *p* un número primo, encuentre todas las cuartetas de enteros a, b, c, d distintas, con $0 \le p-1$ tales que $ad-bc$ sea múltiplo de *p*.

OMM-SEL-VI33

Muestre que 100 divide a $1+11^{11}+111^{111}+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{10\text{ cifras}}{}^{\overbrace{11\cdots1}^{10\text{ cifras}}}$

OMM-SEL-VI36

Sea *p* un número primo, encuentre todas las cuartetas de enteros a, b, c, d distintas, con a, b, c, d y d también distintos $0 \le a, b, c, d \le p-1,$ tales que $ad-bc$ sea múltiplo de *p*.

OMM-AGS-VII

Se sabe que el producto de 1992 número naturales es 1992.
¿Cuántos de dichos factores deben ser iguales a 1? Da el mínimo y el máximo de este tipo de factores.

OMM-DGO-VI-3

Encuentre un número de cuatro dígitos si se sabe que:
i) La suma de los cuadrados de los dos dígitos extremos es igual a 13;
ii) La suma de los cuadrados de los dos dígitos medios es igual a 85;
iii) Si del número buscado se resta 1089, se obtiene un número que se escribe con los dígitos, pero en orden contrario.

OMM-DGO-VI-2

Agregue al final del número 523, otros tres dígitos, de tal manera que el número de seis dígitos resultante, sea múltiplo de 7, 8 y 9. Determine todas las soluciones.

OMM-JAL-VI-1

Al multiplicar un número de tres cifras por 7 se obtiene un número que termina a la derecha en 638. Encontrar ese número.

IBEROvii-1 Para cada entero positivo n sea a_n el último dígito del número
$$1+2+3+\cdots+n.$$
Calcular $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1992}.$

OLIMPIADA INTERNACIONAL

XXXIII imo-1 Hallar todos los enteros a, b, c con $1 < a < b < c$ tales que $a-1 \quad b-1 \quad c-1$ divide a $abc-1$.

Respuestas:

C17-e) $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$, donde x e y recorren todos los enteros que satisfacen: $0 < y < x$, $(x, y) = 1$, x e y son de distinta paridad.)

FO5-14) 27 soluciones.
FO5-16) (2,3,6)
FO5-19) $n = 181 \cdot 11^{10} \cdot 2^{180}$.
FO5-21) n no primo y diferente de 4.
FO5-27) 13 es divisor.
FO5-28) Naturales menores o iguales a 70.

F05-29) $n \leq 25$
F05-30) a debe ser primo.

F05-35) $\begin{cases} a = 1 \quad b = 1989 \\ a = 2 \quad b = 993 \\ a = 5 \quad b = 393 \\ a = 10 \quad b = 189 \end{cases}$

Primos de Fermat
Conjetura de Golbach
Teorema de Lagrange