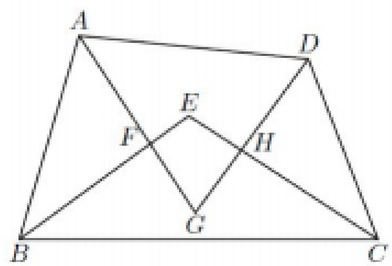
Tema: Geometría – Cuadriláteros cíclicos

Problemas:

1. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra. Prueba que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.



2. Considérese un punto P en la prolongación del diámetro AB de una circunferencia. Desde P se traza una secante que toca a la circunferencia en C y D. ¿Cuántos ángulos rectos puedes encontrar?
3. Sea AB el diámetro de una semicircunferencia. Un punto M es marcado sobre la semicircunferencia, y un punto K es marcado sobre AB. Una circunferencia con centro P pasa por A, M y K, y otra circunferencia con centro Q pasa por M, K y B. Mostrar que M, K, P y Q son concíclicos.
4. Sea AB una cuerda de una circunferencia y P un punto sobre ella. Sea Q la proyección de P sobre AB y R y S las proyecciones de P sobre las tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente. Probar que $PQ^2 = PR \cdot PS$
5. Por un punto C del arco $\widehat{AB}$ de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda AB en los puntos D y E, y a la circunferencia, en los puntos F y G. ¿Para cuál posición del punto C en el arco $\widehat{AB}$, el cuadrilátero $DEGF$ es cíclico?
6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AB y DC se intersecan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersecan en un punto P. Demuestra que las bisectrices de los ángulos $< DPC$ y $< AQD$ sin perpendiculares.
7. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Una recta por A corta al circuncírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D, respectivamente. Muestra que los circuncírculos de los triángulos DCE y BDE son tangentes a los lados AC y AB, respectivamente.
8. Consideremos un triángulo acutángulo y el triángulo que se forma con los tres pies de sus alturas. Encuentra los valores de los ángulos del triángulo si estos triángulos resultan semejantes (*OMM etapa final 2016*).
9. Un cuadrilátero cíclico $ABCD$ es tal que las cuerdas AD y BC son paralelas, $|AD| < |BC|$ y el centro del circuncírculo de $ABCD$ queda en el exterior del cuadrilátero. Sea E la intersección de las rectas AB y CD. Demostrar que $AOCE$ es un cuadrilátero cíclico.
10. En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC intersecta a AD en K. Demuestra que $< BCM =< KCM$.
11. Una línea PQ, paralela al lado BC de un triángulo ABC, corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q corta de nuevo a AB en R. Demuestra que el cuadrilátero $RQCB$ es cíclico.
12. Sea $ABCD$ un rectángulo y sea P un punto en su interior de tal manera que $< APD + < BPC = 180º$. Encuentra el valor de $< PAD + < PCB$.
13. Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales, biseca al alado opuesto.
14. Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos sobre su circuncírculo de manera que AD, BE y CF son diámetros de dicho circuncírculo. Las rectas AE, BF y CD forman un triángulo $A'B'C'$. Demuestra que el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ (*OMM etapa final 2016*).
15. Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Construimos la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC. Prueba que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.