Las alturas y el ortocentro

Problema 2.35 *Demuestra que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.*

Problema 2.36 *Sea AD la altura de el triángulo $\triangle ABC$, H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.*

Problema 2.37 *Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide una altura, es el mismo para las tres alturas.*

Problema 2.38 *Sea H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los circuncírculos de los cuatro triángulos $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle HAC$ y $\triangle HAB$, tienen todos el mismo radio.*

Problema 2.39 *Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico*[2].

Problema 2.41 *El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos D, E y F, respectivamente. Sea I el incentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que I es el ortocentro del triángulo $\triangle DEF$.*

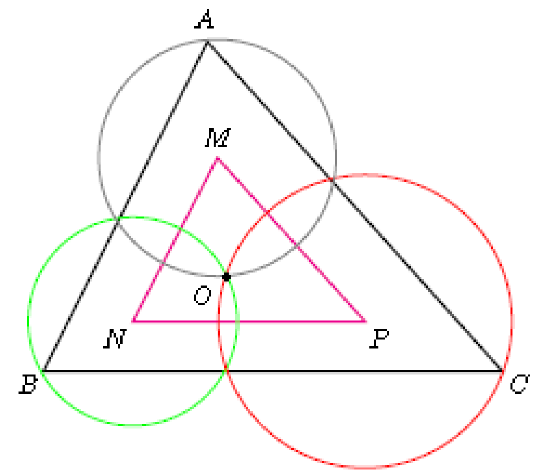
Problema 2.42 *Sea AD la altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$. Sean X y Y los puntos medios de las otras dos alturas, H el ortocentro y M el punto medio de BC. Demuestra que el circuncírculo de $\triangle DXY$ pasa por H y por M. También, demuestra que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DXY$ son semejantes.*

[2] El *triángulo órtico* es el formado por los pies de las alturas.

Las mediatrices y el circuncentro

Problema 2.48 *En un triángulo equilátero $\triangle ABC$, el punto K divide el lado AC en la razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en la razón $1:2$. Demuestra que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 2.50 *Tres circunferencias tienen un punto común O. Los lados del triángulo $\triangle ABC$ pasan por los otros puntos de intersección entre los pares de circunferencias, como se muestra en la figura. Demuestra que el triángulo formado por los centros de las circunferencias es semejante al triángulo $\triangle ABC$.*



Problema 2.51 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H, O y M, el ortocentro, el circuncentro y el punto medio del lado BC, respectivamente. Demuestra que AH es el doble de OM.*

Problema 2.52 *Sean M y N las proyecciones del ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$ sobre las bisectrices interior y exterior del ángulo $\angle B$. Demuestra que la línea MN bisecta al lado AC.*

Problema 2.53 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea H el ortocentro, O el circuncentro, sea AL la bisectriz de el $\angle BAC$. Demuestra que AL bisecta el $\angle HAO$.*