

## Problemas Congruencias 28/08/2018

Útil al trabajar con cuadrados: Módulos 3 (residuos 0 y 1) y 4 (residuos 0 y 1)

Útil al trabajar con cubos: Módulos 7 (residuos 0, 1 y 6) y 9 (residuos 0, 1 y 8)

Útil al trabajar con primos: Módulos 3 (residuos 1 y 2), 4 (residuos 1 y 3) y 6 (residuos 1 y 5)

Útil al trabajar con cuadrados de impares: Módulo 4 (residuo 1) y 8 (residuo 1)

Último dígito: Módulo 10

### Aritmética modular

1. Encuentra el último dígito de  $1989^{1989}$
2. Encuentra el último dígito de  $2^{50}$
3. ¿Cuál es el último dígito de  $777^{777}$ ?
4. Encuentra el residuo de  $2^{100}$  cuando lo divides entre 3
5. Encuentra el residuo de  $3^{1989}$  cuando lo divides entre 7
6. Demuestra que  $5555^{2222} + 2222^{5555}$  es divisible entre 7
7. Encuentra el último dígito de  $7^{7^7}$
8. Encuentra el residuo de  $6^{100}$  al dividirlo entre 7

### Cuadrados y cubos; números primos y su forma

9. Existirá un  $n$  tal que  $n^2 + n + 1$  es divisible entre 1955
10. Demuestra que  $n^5 + 4n$  es divisible entre 5 para todo  $n$  número natural.
11. Demuestra que  $n^2 + 1$  no es divisible entre 3 para ningún número natural  $n$ .
12. Demuestra que  $n^3 + 2$  no es divisible entre 9 para ningún número natural  $n$ .
13. Demuestra que  $n^3 - n$  es divisible por 24 para todo  $n$  impar. *Sugerencia: Prueba que es divisible entre 3 y luego que es divisible entre 8.*
14. Demuestra que  $p^2 - 1$  es divisible entre 24 si  $p$  es un número primo mayor a 3
15. Demuestra que  $p^2 - q^2$  es divisible entre 24 si  $p$  y  $q$  son primos mayores a 3
16. Los números  $x, y, z$  cumplen que  $x^2 + y^2 = z^2$ . Demuestre que al menos uno de ellos es múltiplo de 3
17. Si  $a$  y  $b$  son dos enteros tales que  $a^2 + b^2$  es divisible entre 21, demostrar que  $a^2 + b^2$  es divisible entre 441
18. Si los números naturales  $a, b$  y  $c$  cumplen que  $a + b + c$  es divisible entre 6, demostrar que  $a^3 + b^3 + c^3$  es divisible entre 6
19. Demuestra que si decrecemos en 7 la suma de tres números cuadrados perfectos, entonces el resultado no puede ser múltiplo de 8
20. Se sabe que  $p, p + 10$  y  $p + 14$  son todos números primos, encuentra el valor de  $p$
21. Dado que  $p$  y  $p^2 + 2$  son números primos, demuestra que  $p^3 + 2$  también es un número primo
22. Demuestra que no hay dos números naturales tales que  $a^2 - 3b^2 = 8$
23. ¿Puede la suma de dos números cuadrados perfectos, ser un número cuadrado perfecto?
24. ¿Puede la suma de tres números cuadrados perfectos impares, ser un número cuadrado perfecto?
25. Si  $p, 4p^2 + 1$  y  $6p^2 + 1$  son números primos, haya el valor de  $p$
26. Si se sabe que  $a + 1$  es divisible entre 3, prueba que  $4 + 7a$  es divisible entre 3 también
27. Se sabe que  $2 + a$  y  $35 - b$  son divisibles entre 11. Demuestra que  $a + b$  es divisible entre 11
28. Encuentra el último dígito de  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2$
29. Siete números cumplen que la suma de cualesquiera 6 de ellos es múltiplo de 7, demostrar que todos y cada uno de ellos es múltiplo de 7
30. Encontrar el menor número que deja residuo 1 al dividirlo entre 2, deja residuo 2 al dividirlo entre 3, deja residuo 3 al dividirlo entre 4, deja residuo 4 al dividirlo entre 5 y deja residuo 5 al dividirlo entre 6
31. Demuestra que  $11^{2n+1} + 12^{2n+1}$  es divisible por 133 para cualquier natural  $n$
32. Encuentra todos los números primos  $p$  tales que  $2p + 1, 3p + 1$  y  $p(2p + 1)(3p + 1) + 1$  también sean primos

33. Demuestra que si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son lados enteros de un triángulo rectángulo, entonces  $30|abc$
34. Pruebe que 641 divide a  $2^{32} + 1$
35. Si  $p$  es un primo impar, demuestre que  $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$
36. Demuestre que si  $2^n - 1$  es un número primo, entonces  $n$  debe ser primo también
37. Si  $n$  es un número impar, entonces  $323|20^n + 16^n - 3^n - 1$
38. Encuentra todos los números naturales  $n$  tales que  $3|n2^n - 1$
39. Demuestra que 7 no puede dividir a un número potencia de 2 más 1
40. ¿Para qué números naturales  $n$  se tiene que  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)|n!$ ?