Fecha: 7 de Agosto de 2018
Tema: Soluciones del examen y Repaso de álgebra
Soluciones del examen

Problema 1. Si tenemos un número entero positivo n, una $transformación$ consiste en dos pasos:
Primer paso: Escoger un dígito d (número entero entre 0 y 9), sumarle el doble de este dígito al número n
Segundo paso: Al resultado del paso anterior agregarle al final (como cifra de las unidades) el mismo dígito d.
Por ejemplo tomando al número 451 y escogiendo 3 como el dígito d, se obtiene lo siguiente al realizar la $transformación$:
Primer paso: $451 + 2 \times d = 451 + 2 \times 3 = 457$
Segundo paso: A 457 agregar el dígito 3 al final $=\ 457\mathbf{3}$
Por lo tanto después de la transformación, obtenemos el número 4573.
Demuestre que si el número n original es múltiplo de 7, entonces al aplicarle la $transformación$, sigue siendo múltiplo de 7.

Solución 1: *Observemos que si aplicamos el criterio de divisibilidad del 7 a un número posterior a una transformación, restaríamos dos veces el último dígito al número restante después de borrar ese dígito. Si lo pensamos bien este proceso es lo contrario a la $transformación$, por lo cual el número obtenido por la transformación es múltiplo de 7 si y sólo si el original lo era, directamente al aplicar el criterio de divisibilidad del 7.*

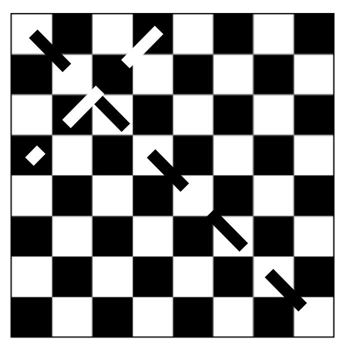
Solución 2: *Observemos que algebraicamente la $transformación$ consiste en agregar dos veces d al número n (con lo que queda $n + 2d$), posteriormente multiplicar por 10 (con lo que queda $10(n + 2d) = 10n + 20d$) y posteriormente agregar d al resultado previo ($10n + 21d$). Finalmente como n es múltiplo de 7, entonces $10n$ también lo es, como 21 es múltiplo de 7, entonces $21d$ también lo es. Por las propiedades de divisibilidad su suma también es múltiplo de 7, por lo cual el número obtenido de la $transformación$ es también múltiplo de 7.*

Problema 2. El factorial ($n!$) de un número entero positivo n se define como la multiplicación de todos los enteros positivos del 1 al n (es decir $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$). ¿Cuál es el último dígito de $2018! + 2018^{2018}$? Justifica tu respuesta.

Solución: *Notemos que $5! = 120$, por lo cual después del $5!$, todos los factoriales necesariamente terminarán en 0. Ahora bien para conocer la última cifra de 2018^{2018} podemos ir haciendo la multiplicación y sólo irnos fijando en la última cifra, ya que el resto de las cifras no afectarán a la última cifra; otra forma de verlo con congruencias es que módulo 10 sólo importa el residuo, que es la última cifra. Comenzamos a multiplicar $8 \times 8 = 64$, $4 \times 8 = 32$, $2 \times 8 = 16$, $6 \times 8 = 48$, $8 \times 8 = 64$; en este momento nos damos cuenta que empezará a repetirse el ciclo, pues como sólo importa la última cifra, entonces nos dará siempre el mismo resultado partiendo de la misma cifra y multiplicando sucesivamente por 8. El ciclo tiene longitud 4, por lo cual necesitamos saber el residuo de 2018 al dividirlo entre 4, ya que este dato nos dará la posición en el ciclo que ocupa la multiplicación número 2018. Por lo tanto el resultado es la posición número 2 del ciclo, que es el 4, por lo cual la solución es $0 + 4 = 4$.*

Problema 3. Se tiene un tablero de ajedrez de 8×8 casillas. ¿De cuántas formas pueden escogerse dos casillas distintas de tal forma que <u>**no**</u> estén ambas en la misma diagonal del tablero? Justifica tu respuesta.

Nota: *Las diagonales de un tablero se definen como una sucesión en línea recta de casillas en donde la siguiente tiene exactamente un vértice en común con la anterior. Se muestran dos diagonales distintas del tablero con líneas punteadas.*



Solución 1: *Un enfoque es contar para cada casilla, si pusiéramos ahí una ficha, cuantas casillas quedan libres para poner la segunda ficha y sumar ese número para cada ficha. Ahora nos damos cuenta que no es necesario hacerlo para todo el tablero, sólo es necesario hacerlo para un cuarto del mismo, pues por rotación o simetría, las demás casillas podrán calcularse. Si tomamos el cuarto de tablero superior y a la izquierda, cada casilla tiene como número de opciones lo siguiente:*

56	*56*	*56*	*56*
56	*54*	*54*	*54*
56	*54*	*52*	*52*
56	*54*	*52*	*50*

Haciendo la cuenta, obtenemos siete casillas con 56 opciones de segunda casilla, cinco con 54 opciones, tres con 52 opciones y una con 50. Pero recordemos que eso se multiplica por 4 por ser sólo un cuarto de tablero, por lo tanto el *número de opciones nos resulta* $4 \times (7 \times 56 + 5 \times 54 + 3 \times 52 + 1 \times 50) = 4 \times 868 = 3472$. *Ahora bien, estamos contando dos veces cada posible pareja de casillas, pues consideramos el primero elegir una o la otra, por lo cual debemos dividir nuestro resultado entre* 2, *resultando* 1736.

Solución 2: *Podemos hacer la cuenta complementaria, contando de cuántas formas podemos escoger dos casillas en la misma diagonal y restarlo de la cantidad total de formas de escoger dos casillas. El conteo de cuántas formas puede escogerse dos casillas en la misma diagonal lo podemos hacer por diagonal del tablero, asignando primero a cual diagonal pertenecerán ambas casillas y ya después escogiendo las dos casillas, siendo así sólo que habrá que hacer el coeficiente binomial* $\binom{k}{2}$, *donde* k *es el número de casillas en la diagonal considerada.*

Obervemos que en el tablero hay 4 *diagonales de longitud* 1, 4 *diagonales de longitud* 2, …, 4 *diagonales de longitud* 7 *y finalmente sólo* 2 *diagonales de longitud* 8. *Además, el número total de escoger dos casillas distintas sin restricción en el tablero es* $\binom{64}{2}$. *Por lo cual la cuenta final a realizar es* $\binom{64}{2} - (4 \times \left(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}\right) + 2 \times \binom{8}{2})$. *Un truco para no tener que hacer todas las cuentas es recordar que* $\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{8}{3}$. *Por lo tanto la cuenta se resume a* $\binom{64}{2} - \left(4 \times \binom{8}{3} + 2 \times \binom{8}{2}\right) = 2016 - (4 \times 56 + 2 \times 28) = 2016 - 224 - 56 = 1736$. ***Nota:*** *Para obtener los puntos completos por el problema, debes de hacer la cuenta completa, no la debes de dejar expresada con coeficientes binomiales.*

Problema 4. Se tiene un triángulo ABC. Se escogen los puntos X, Y y Z sobre los lados BC, CA y AB, de tal forma que $BC = 3BX$, $CA = 3CY$ y $AB = 3AZ$. Suponga que el triángulo XYZ es equilátero. Demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

Solución: Llamemos L, M y N a los puntos sobre los lados BC, CA y AB, de tal forma que $BC = 3CL$, $CA = 3AM$ y $AB = 3BN$. Ahora vemos que se forman varias paralelas que cortan en tres partes iguales a cada lado. Así pues $LX = \frac{BC}{3}$. Por el Teorema de Tales, $ZM = \frac{BC}{3}$ y además es paralelo a BC, por lo cual $ZM = LX$ y además con paralelas. Fácilmente puede demostrarse que por lo tanto $XLZM$ es un paralelogramo y $ML = XZ$. Análogamente obtenemos que $MN = XY$ y que $LN = YZ$. Así pues, LMN es un triángulo equilátero también. Luego ZM es paralelo a NY por el Teorema de Tales, además $YZ = MN$, por lo tanto el cuadrilátero $ZNYM$ es un trapecio con sus diagonales de la misma longitud; es fácil probar que es un trapecio isósceles. Por lo tanto $ZN = MY$, además sabemos que $\frac{AB}{3} = ZN = MY = \frac{AC}{3}$, por lo cual deducimos que $AB = AC$. Finalmente se pueden obtener las mismas igualdades con argumentos similares para los otros pares de lados, por lo cual se concluye que $AB = BC = CA$, y por lo tanto ABC es un triángulo equilátero.

Tema: Repaso de álgebra/manipulación

Los temas que se verán son: Los conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos, etc.), repasaremos un poco la jerarquía de operaciones y las operaciones con signos; se hablará de qué es una función en general; posteriormente que es una desigualdad y como se pueden manipular básicamente. Luego hablaremos de la suma de Gauss un poco y de las progresiones aritméticas. Finalmente vamos a hablar de representar correctamente los problemas y buscar propiedades interesantes, traducir correctamente lo que nos pide o lo que está diciendo el problema y algo sobre resolver problemas.

Proceso para resolver un problema: entender el problema, hacer un plan, desarrollar el plan e interpretar los resultados, cuando no tenemos idea: Reconocer correctamente datos, variables y objetivos del problema, concentrarse sólo en una parte del problema, intentar dar valores a cantidades desconocidas, hallar un problema más simple parecido o relacionado, suponer que ya se llegó a la solución y ver qué podemos deducir de eso, tratar de procesar la información de forma distinta (diagrama, gráfica o tabla).

Problemas:

Problema 1, Fuente: Final Estatal OMM 2016

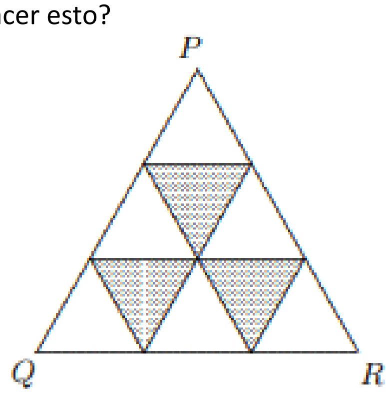
Alberto encontró un libro en la biblioteca al cual le faltaban algunas hojas y estas eran consecutivas. Encuentra la numeración de las páginas faltantes si se sabe que la suma de estas hojas es igual a 452 y la impresión fue por ambas caras de cada hoja.

Problema 2, Fuente: Final Estatal OMM 2012

Mostrar que el siguiente tablero de 5×5 no se puede completar con los números del 1 al 25 (usando exactamente una vez cada uno) de modo que en cada columna y en cada renglón la suma sea la misma.

7		17		3
5		9		13
15		1		11

Problema 3, Fuente: Final Estatal OMM 2016
¿Qué número es más grande, 2^{2016} o $3^{303} \times 4^{404} \times 5^{505}$?
Problema 4, Fuente: Final Estatal OMM 2016
Determina si existe un entero positivo mayor que 1000 tal que si se le quitan sus primeros tres dígitos se obtiene un número que vale $\frac{1}{2016}$ veces el número original. Determina lo mismo cambiando 2016 por 2015
Problema 5, Fuente: Final Estatal OMM 2013
Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1 - x$, ¿cuánto vale $g(f\left(\cdots g\left(f\left(g\big(f(2013)\big)\right)\right)\right))$? En donde g y f se aplica 100 veces?
Problema 6, Fuente: Final Estatal OMM 2012
Encontrar todas la parejas de enteros positivos $a \leq b$ que satisfagan la siguiente ecuación:
$$a!\,b! = a^2 b^2$$
Problema 7, Fuente: Final Estatal OMM 2011
En un estanque hay 199 litros de agua inicialmente. Se desea poner entre 2 y 6 desagües de distinto tamaño, por donde saldrá toda el agua lentamente. Se tienen 100 recipientes: uno con capacidad de 1 litro, otro con capacidad de 2 litros, otro con capacidad de 3 litros y así sucesivamente (el último tiene capacidad de 100 litros). Se quieren escoger algunos de estos recipientes y colocar uno en cada desagüe para recolectar agua (se escoge el mismo número de recipientes que de desagües). Se requiere que la suma de las capacidades de los recipientes sea 100 litros. Aun cuando un recipiente se llena, el agua continúa saliendo por el desagüe y se tira, la velocidad con la que fluye el agua por cada desagüe es la misma. Determinar el número óptimo de desagües y las capacidades de los recipientes escogidos de tal manera que la suma de las capacidades de los recipientes que estén **totalmente llenos** cuando se terminan los 100 litros sea máxima (**Nota:** sólo cuentan los recipientes que sí hayan sido llenados por completo, por ejemplo, si se colocan cuatro recipientes con capacidades 12, 20 , 28 y 40, la cantidad de litros recolectados será de 12+20 = 32).
Problema 8, Fuente: Final Estatal OMM 2006
En los triangulitos en blanco de la figura deben escribirse sin repetir los números del 1 al 6, de tal forma que la suma de los números que queden en los 3 triángulos que tienen una base en PQ sea igual a la de los tres triángulos que tienen una base en PR y también a la de los 3 triángulos que tienen una base en QR. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?



Problema 9, Fuente: Final Estatal OMM 2006

Dado un número entero n de tres cifras con la cifra de las decenas menor que 7, llamemos $f(n)$ al número que se obtiene al sumar 3 a la cifra de las decenas, y después escribir las cifras en orden inverso. (Por ejemplo $f(618) = 846$). Encuentra todos los números n tales que $f(n) = 4n$

Problema 10, Fuente: IV OMCC México 2002

En el plano coordenado se tiene una cuadrícula de $n \ x \ n$, con n un entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0,0)$ a (n, n), sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama equilibrado si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

Problema 11, Fuente: V OMCC Costa Rica 2003

Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuando se tiene la igualdad.

Problema 12, Fuente: VI OMCC Nicaragua 2004

Se define una sucesión a_0, a_1, a_2, ... de la siguiente manera $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$, con m y n enteros positivos y $m \neq n$.