Taller: 09 de Agosto de 2018
Tema: Divisibilidad e introducción a congruencias

Problemas

1. Un entero positivo es divisible entre 2 si y sólo si su último dígito es par.
2. Un entero positivo es divisible entre 4 si y sólo el número formado por sus últimos dos dígitos es divisible entre 4.
3. Un entero positivo es divisible entre 8 si y sólo el número formado por sus últimos dos dígitos es divisible entre 8.
4. Un entero positivo es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 9.
5. Un entero positivo es divisible entre 11 si y sólo si la suma de los dígitos en posición par menos la suma de los dígitos en posición impar es múltiplo de 11.
6. Encuentra el mayor número menor a 10000 tal que es un cuadrado y un cubo a la vez.
7. Demuestre que si n es un entero positivo impar, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.
8. Demuestre que ningún entero de la forma $4n + 3$ puede ser escrito como la suma de dos cuadrados.
9. ¿Cuánto suman los últimos 2005 dígitos de $2005^{2004} \times 2004^{2005}$?
10. Encuentre todos los primos p tales que p, $p + 2$ y $p + 4$ son todos números primos.
11. Si a y b son enteros tales que a+5b y a-5b son ambos divisibles por 2002, demuestre que $a^2 + b^2$ también es múltiplo de 2002.
12. Sea n un entero mayor que 6. Demuestre que si $n + 1$ y $n - 1$ son ambos números primos, entonces $n^2(n^2 + 16)$ es múltiplo de 720.
13. ¿Para qué valores de n se cumple que $n - 2 \mid n + 2$?
14. Demuestra que 1 sumado al producto de dos números pares consecutivos o al producto de dos números impares consecutivos es un número cuadrado perfecto.
15. Demuestra que $3 \mid 4^n - 1$ para todo entero no negativo n
16. Demuestra que $11 \mid 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ para todo entero no negativo n
17. Demuestra que $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ para todo entero no negativo n

---

18. Sean n y r enteros tales que $n \equiv r \ (mod\ 7)$, Demuestre que:
19. $1000n \equiv 7 - r \ (mod\ 7)$
20. Demuestre que un entero n es divisible entre 5 si y sólo si el dígito de sus unidades es divisible entre 5
21. ¿Puede un número formado por 100 dígitos 0, 100 dígitos 1 y 100 dígitos 2 ser un número cuadrado perfecto?
22. ¿Habrá algún entero n tal que $n!$ termina exactamente con 11 ceros en su representación decimal?
23. Sean p y q números primos distintos. Demuestre que un entero es divisible entre pq si y sólo si es divisible entre p y q. Deduzca los criterios de divisibilidad entre 6 y entre 10.
24. Determine todos los enteros positivos n tales que:
$$\underbrace{111\ldots1}_{n\ veces} \equiv 0 \ (mod\ 101)$$
25. Un número de 6 dígitos está representado por el número $1vwxyz$ donde $1, v, w, x, y, z$ son sus dígitos. Al multiplicarlo por 3, se obtiene el número de 6 dígitos $vwxyz1$. Determine el valor del número original.
26. ¿Para qué valores de n se cumple que $n - 2 \mid n^2 - 3$?
27. ¿Para qué valores de n se cumple que $n - 2 \mid 2n$?
28. ¿Para qué valores de n se cumple que $3 \mid n^2 - 2$?
29. Si n es un número impar, demuestra que $16 \mid n^4 - 1$
30. Demuestra que 1 sumado al producto de cuatro números consecutivos es un número cuadrado perfecto.
31. Demuestra que $17 \mid 3^{4n+2} + 2 \times 2^{3n+1}$ para todo entero no negativo n
32. Demuestra que $11 \mid 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ para todo entero no negativo n
33. Demuestra que $11 \mid 5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ para todo entero no negativo n
34. Demuestra que $288 \mid 7^{2n+1} - 48n - 7$ para todo entero no negativo n
35. Demuestra que $17 \mid 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ para todo entero no negativo n
36. Sea p un número primo y sean a y n enteros positivos. Demuestre que si $2^p + 3^p = a^n$, entonces $n = 1$.
37. ¿Cuáles son los últimos dos dígitos de 11^{2010}?
38. Sea n un entero positivo y sean $a < b < c < d$ los cuatro divisores positivos más pequeños de n. Determine todos los enteros positivos n tales que $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
39. Todo número primo de la forma $3k + 1$ es de la forma $6k + 1$.
40. Probar que para todo entero positivo n existen n enteros consecutivos que son compuestos. ¿Qué pasaría si el primero de ellos fuera $(n + 1)! + 2$?
41. Demostrar que si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo (Primo de Mersenne)
42. Demostrar que si $2^n + 1$ es primo entonces n es potencia de 2 (Primo de Fermat)
43. Demostrar que el k-ésimo primo (p_k) cumple que $p_k \leq 2^k$.
44. Demostrar que existe una cantidad infinita de números primos de la forma $4k + 3$
45. Demostrar que existe una cantidad infinita de números primos de la forma $4k + 1$

Cosas importantes

Factorizaciones importantes:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^3 = x^3 + \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{k} x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1y^{n-1} + y^n$$
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{(n-2)}y^1 + x^{(n-3)}y^2 + \cdots + x^1y^{n-2} + y^{n-1}\right)$$
$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots + y^{2n})$$

Definiciones importantes:

Coeficientes binomiales: Representan la cantidad de formas de escoger k objetos distintos de n objetos dados sin importar el orden de la elección. Se denotan con la expresión nCk o la expresión $\binom{n}{k}$. La fórmula para calcularlos es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Número primo: Número entero que tiene exactamente dos divisores enteros positivos (es decir 1 y él mismo). El 1 no es primo.

Número compuesto: Número entero que tiene más de dos divisores enteros positivos.

Divisibilidad: Decimos que el número b es divisible entre a si y sólo si la división $\frac{b}{a}$ da un resultado entero. Una definición alternativa es decir que es divisible si y sólo si existe un entero c tal que $b = a \times c$. El símbolo para escribir esto es $a \mid b$ y se lee "a divide a b".

Divisor: Decimos que a es divisor de b si y sólo si $a \mid b$.

Múltiplo: Decimos que b es múltiplo de a si y sólo si $a \mid b$.

Propiedades de la divisibilidad: Si a, b, x y y son enteros, entonces se cumple que:

1) Si $a \mid x$ y $a \mid y$, entonces $a \mid x + y$
2) Si $a \mid x$, entonces $a \mid xy$
3) $a \mid a$
4) Si $a \mid b$ y $b \mid y$, entonces $a \mid y$
5) Si $a \mid x$ y $a \mid x + y$, entonces $a \mid y$

"Forma" de los números: Decimos que un número n es de la forma $ak + b$ con a y b números enteros, cuando el residuo de la división de n entre a es igual a b. Alternativamente, podemos decir los mismo si $n - b$ es divisible entre a, sin que b necesariamente sea el residuo de la división mencionada, esto se usa generalmente para poder escribir a b como un número negativo, con una magnitud menor y que sea más fácil realizar cálculos con ese valor.

Congruencias: Decimos que dos números enteros a y b son congruentes módulo n ($a \equiv b \ (mod\ n)$, si ambos dejan el mismo residuo al dividirlos entre n. Una afirmación equivalente sería decir que a es de la forma $nk + b$ y una definición alternativa sería que a y b son congruentes módulo n ($a \equiv b \ (mod\ n)$) si y sólo si $n \mid a - b$.

Máximo común divisor (mcd): El mayor número entero positivo que divide a dos números dados.

Mínimo común múltiplo (mcm): El menor número entero positivo que es múltiplo de dos números dados.

Primos relativos: Decimos que dos enteros a y b son dos números primos relativos si y sólo si $mcd(a,b) = 1$

Teoremas y resultados importantes:

Lema de Euclides: Si los enteros a y b son números primos relativos, y $a \mid bn$, entonces $a \mid n$

Teorema: La cantidad de números primos es infinita. **Demostración:** Supongamos que hay una cantidad finita de números primos $(p_1,\ p_2, p_3, \ldots, p_k)$. Ahora tomemos su producto más 1 $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots p_k + 1$. Es fácil ver que ese número no es divisible por ningún p_i, por lo tanto debe ser un número primo distinto a los de la lista, sin embargo esto es una contradicción pues habíamos supuesto que estos eran todos los números primos existente.

Teorema fundamental de la aritmética: Si n es un número entero positivo, entonces existe una y sólo una factorización en números primos salvo el orden.

Postulado de Bertrand: Si $n > 1$, entonces existe un número primo p con $n < p < 2n$.

Teorema de Dirichlet: Si a y b son números primos relativos, entonces existen una infinidad de números primos de la forma $ak + b$.

Pequeño Teorema de Fermat: Si p es un número primo positivo y a es un número entero, entonces $a^p \equiv a \ (mod\ p)$.

Teorema de Fermat: Si x, y, z son números enteros, entonces no existe ningún $n \geq 3$ entero positivo tal que

$$x^n + y^n = z^n$$