1) Demuestra por Inducción las siguientes fórmulas:
   a. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
   b. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   c. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   d. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
   e. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$
   f. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$
2) Pruebe que para todo entero n impar, n^2-1 es múltiplo de 8
3) Pruebe que n^3+2n es divisible por 3 para todo entero positivo n
4) Pruebe que $n!>3^{n-2}$ para todo entero n mayor o igual a 3
5) Pruebe que $(3n)!>2^{6n-4}$ para todo entero positivo n
6) La sucesión de *Fibonacci* $\{F_n\}$ se define con $F_0=0$, $F_1=1$ y $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ para toda $n\geq 0$. Demuestre lo siguiente por inducción:
   a. $F_n<2^n$ para $n\geq 0$
   b. $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$ para todo entero $n\geq 1$
   c. $F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots$
   d. $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$
   e. $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$
   f. $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$
   g. $F_1+F_3+\cdots+F_{2n+1}=F_{2n+2}$
   h. $F_n(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{2n}$
7) Pruebe que el número total de diagonales de un polígono de n lados ($n\geq 3$) es $\frac{n(n-3)}{2}$
8) Si $x\geq 0$ entonces para toda n natural, probar que $(1+x)^n\geq 1+x^n$
9) El juego de Nim se juega entre dos personas con las siguientes reglas: Se pone un número n de fichas iguales sobre la mesa. Cada jugador en su turno puede tomar 1, 2 o 3 fichas. El jugador que toma la última ficha pierde. Demuestre que el primer jugador tiene la estrategia ganadora siempre y cuando $n\not\equiv 1\ (mod\ 4)$
10) Para $n\geq 13$, se tiene que $n^2\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n$
11) Sea n un número compuesto, demuestra que existe un número primo p tal que $p\mid n$
12) Demuestra que todo número natural mayor o igual a 2 puede ser factorizado en números primos
13) Se tienen $2n$ puntos en el plano. Se dibujan n^2+1 segmentos de línea entre estos puntos. Demuestra que hay al menos un conjunto de tres puntos que están unidos cada dos por un segmento de línea.
14) Hay n carros idénticos en una pista circular. Entre todos ellos, tiene exactamente suficiente gasolina para dar una vuelta a la pista. Demuestre que hay un carro que puede dar la vuelta completa recolectando la gasolina de los carros que se encuentre en su camino.
15) Sea x un número real tal que $x+\frac{1}{x}$ es un número entero. Demuestre que $x^n+\frac{1}{x^n}$ es entero para todo n natural.
16) Demuestre que $(n+1)(n+2)\ldots(2n)=2^n\times 1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)$
17) En un tablero cuadrado de $2^n\times 2^n$ dividido en casilla de 1×1, se remueve una de estas. Muestre que siempre es posible cubrirlo con piezas L triminos.
18) Demuestre que $3^{n+1}\mid 2^{3^n}+1$ para todo $n\geq 0$
19) Demuestre que todos los números de la forma $1007, 10017, 100117, \ldots$ son divisibles por 53
20) Demuestre que todos los números de la forma $12008, 120308, 1203308, \ldots$ son divisibles por 19
21) Demuestre que $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n=\frac{(-1)^n-1}{2}$
22) Demuestre que $1-4+9-16+\cdots+(-1)^{(n+1)}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+3+\cdots+n)$
23) Demuestre que 6^n-1 es divisible por 5 para todo n número natural
24) Demuestre que para cualquier número natural n y cualquier número real p, se cumple que $(1+p)^n\geq 1+np+\frac{n(n-1)p^2}{2}$
25) Demuestre que $2^m\geq 1+m$ para todo m en los naturales
26) Demuestre que $2n\leq 2^n$para todo n natural
27) Demostrar $\frac{m^3}{3}<1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2$ para todo m en los naturales
28) Demostrar que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$
29) Demostrar que $n+7<$ n^2 para todo entero $n\geq 4$
30) Demostrar que $1+2n<3^n$ para todo entero $n\geq 2$
31) Demostrar que $2^n<n!$ para todo $n\geq 4$
32) Demostrar que para $x>0$ real y $n\geq 3$ entero, se cumple que $(1+x)^n>1+nx+nx^2$
33) Demostrar que $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ para $n\geq 2$
34) Demostrar que $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{n!^2}$ para todo entero $n\geq 2$
35) Demostrar que $1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$