P R O B L E M A S

1.- Un club desea organizar un campeonato de individuales entre sus 1023 socios. Para ello acuerdan las siguientes condiciones:

- Cada jugador que pierda un partido queda automáticamente eliminado del torneo.
- Cada partido tiene que jugarse con una pelota nueva.
- Organizar el torneo de tal manera que haya la menor cantidad de pelotas.

¿Cuál será la cantidad mínima de pelotas que deben comprarse para efectuar dicho torneo?

2.- Carolina hizo un pastel que dividió en cuatro porciones: dos de $\frac{1}{4}$, una de $\frac{1}{3}$ y una de $\frac{1}{6}$. Ella comió una de las porciones y le dio las otras tres a su hermano Juan, quien a su vez comió una porción y los dos hijos de éste (Margarita y Pedro) comieron las restantes.

- El gemelo del que comió la mayor porción y quien comió la menor son de sexos opuestos.
- Quien comió más y quien comió menos tienen la misma edad.

¿Qué parte del pastel comió cada uno?

3.- El León y el Unicornio.

Cuando Alicia entró en el Bosque del Olvido no lo olvidó todo, solamente ciertas cosas. A menudo olvidaba su nombre, y una de las cosas que más disposición tenía a olvidar era el día de la semana. Ahora bien, el León y el Unicornio visitaban frecuentemente el bosque. Los dos eran criaturas extrañas. El León mentía los lunes, martes y miércoles, y decía la verdad los otros días de la semana. El Unicornio, por otra parte, mentía los jueves, viernes y sábados, pero decía la verdad los restantes días de la semana.

a) Un día Alicia se encontró con el León y el Unicornio que descansaban bajo un árbol: Ellos dijeron lo siguiente:

León: Ayer fue uno de los días en los que me tocaba mentir.

Unicornio: Ayer fue también uno de los días en los que me tocaba mentir.

A partir de estos enunciados Alicia (que era una chica muy lista) fue capaz de deducir el día de la semana. ¿Qué día era éste?

b) En otra ocasión Alicia encontró al León solo. Éste dijo:

(1) Ayer mentí.
(2) Mentiré de nuevo dentro de tres días.

¿En qué día de la semana sucedió esto?

c) En que día de la semana le es posible al León hacer los dos enunciados siguientes:

(1) Ayer mentí.
(2) Mañana mentiré de nuevo.

d) En que día de la semana le es posible al León decir: "Ayer mentí y mañana mentiré de nuevo". (La respuesta no es la misma que la del problema anterior).

4.- Cuando hablábamos sobre parentescos un amigo me hizo notar que no es lo mismo un **tío-hermano** que un **hermano-tío**. Un tío-hermano es el hermano de tu mamá (o papá), decía, y lo segundo se refiere a un hermano tuyo, que también sea tu tío. Explica las distintas posibilidades que haya para este segundo caso.

5.- En una feria hay 3 juegos: las cataratas, la montaña rusa y la rueda de la fortuna.

A la feria asistió un grupo de 39 personas, de las cuales 5 decidieron no subirse a los juegos. De las personas del grupo, 19 se subieron las cataratas, 17 a la montaña rusa, y 14 a la rueda de la fortuna.

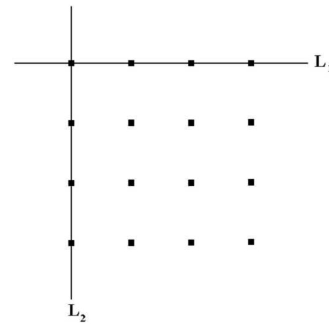
De las personas del grupo que se subieron a dos a más juegos distintos: 8 subieron a las cataratas y a la montaña rusa; 4 a la montaña rusa y a la rueda de la fortuna; y 7 a las cataratas y a la rueda de la fortuna.

a) ¿Cuántas personas del grupo se subieron a los tres juegos?
b) ¿Cuántas personas del grupo se subieron solamente a un juego?

6.- En la siguiente figura, se tienen 16 puntos que forman una retícula y dos rectas, $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ perpendiculares entre sí.

a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno de sus lados sea paralelo a $\mathbf{L_1}$ ni a $\mathbf{L_2}$?

b) ¿Cuántos triángulos rectángulos isósceles se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno de sus lados sea paralelo a $\mathbf{L_1}$ ni a $\mathbf{L_2}$?



7.- Se ubicaron las letras del abecedario a un costado y a otro de una recta de la siguiente manera:

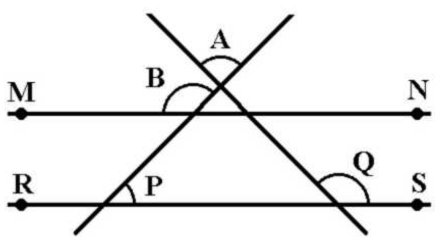
B C D G J O P Q R S U

A E F H I K L M N T V W

faltaron la X, Y y Z. ¿De qué lado se ubicarían a éstas y por qué?

8.- Sean **A**, **B** y **C** los vértices de un triángulo con lado mayor **BC**. ¿De qué manera deberá cortarse el triángulo para armar con todas sus piezas un rectángulo (obviamente de la misma área).

9.- Tomando en cuenta la figura siguiente y los datos que se dan, calcula las medidas de los ángulos **P** y **Q**, argumentando tu respuesta.



DATOS:

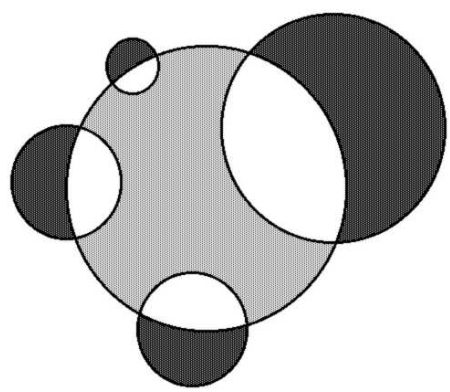
$\angle \mathbf{A} = 100^\circ$

$\angle \mathbf{B} = 110^\circ$

$\overline{\mathbf{MN}}$ es paralela a $\overline{\mathbf{RS}}$

10.- Una recta separa al plano en dos regiones distintas y tú te encuentras en la misma región que el punto **P**. En la otra región, a la que no puedes pasar ni pasar algún instrumento a ella, se encuentra el punto **Q**, el cual puedes ver desde tu región. Da una manera para calcular la distancia que existe entre **P** y **Q** sin emplear tablas trigonométricas.

11.- Las medidas de los radios de los círculos de la figura son 50, 40, 20, 20 y 10 unidades. Todos los centros de los círculos más pequeños son puntos que pertenecen a la circunferencia del mayor; además, los círculos pequeños no se traslapan entre ellos. Sea **R** la superficie que está gris (el área sombreada del interior del círculo mayor, que no está traslapado con algún círculo menor), y sea **C** la superficie negra (la suma de las áreas de los círculos menores, qué están fuera del círculo mayor). Sólo una de las siguientes tres relaciones es verdadera:

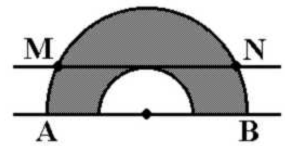


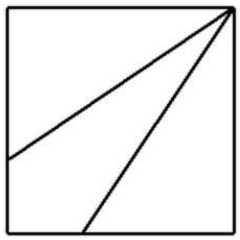
R > C, **R = C**, ó, **R < C**.

¿Cuál es la relación correcta entre **R** y **C**, y por qué?

12.- Desde un punto **C**, exterior a una circunferencia se trazan dos rectas tangentes a ella en los puntos **X** y **Y**. Los segmentos de tangencia, **CX** y **CY**, miden 10 cm cada uno. Se toma otra tangente a la circunferencia que intersecta a **CX** y **CY** en **A** y **B** respectivamente. ¿Qué longitud tendrá el perímetro del triángulo **ABC**?

13.- En la figura adjunta se tienen dos semicircunferencias concéntricas y el segmento $\overline{\mathbf{MN}}$ es tangente a la menor. La recta $\overline{\mathbf{MN}}$ y $\overline{\mathbf{AB}}$ son paralelas y el segmento $\overline{\mathbf{MN}}$, mide 12 cm. Calcula el área de la figura sombreada.

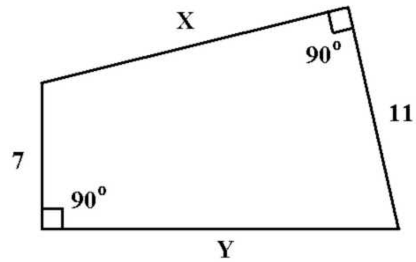


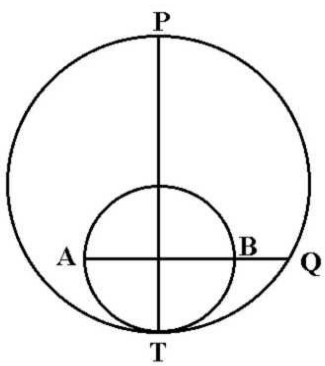


14.- De uno de los vértices de un cuadrado parten dos rectas que lo dividen en tres regiones de áreas exactamente iguales. ¿En qué razones cortan a los lados del cuadrado estas rectas?

15.- Da las medidas de los radios de tres circunferencias tangentes entre sí, cuyos centros son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles de 50 cm² de área.

16.-El cuadrilátero de la figura tiene en centímetros, medidas **enteras** y **distintas** en todos sus lados. También tiene dos ángulos rectos. Las medidas anotadas, 7 y 11, corresponden a los lados menores. ¿Cuánto miden los lados **X** y **Y**?



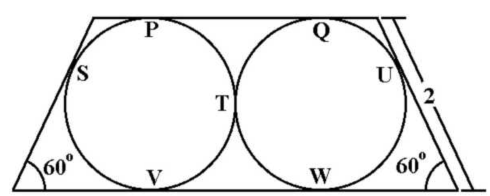


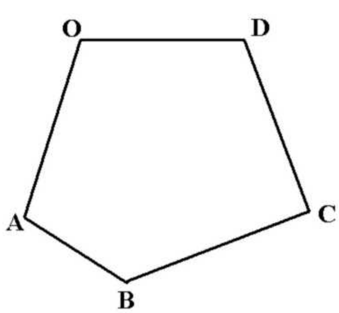
17.- En la figura se muestran dos circunferencias tangentes en **T**, cuyas áreas están en razón ¼, y además:

a) **PT** es diámetro de la mayor.
b) **AB** es diámetro de la menor.
c) **PT** y **AB** son perpendiculares.
d) **Q** es el punto de la circunferencia mayor y está alineado con **A** y **B**.

Si la menor circunferencia tiene 10 cm de radio, da la distancia entre **P** y **Q**.

18.- En el trapecio de la figura adjunta, los puntos **P**, **Q**, **S**, **T**, **U**, **V** y **W** son puntos de tangencia de las circunferencias inscritas. Tomando en cuenta los datos de la figura, calcular el área del trapecio.





19.- En la figura adjunta se tiene que:

OA = **OD**	∠**OAB** = 90°
AB = 6	∠**OBC** = 90°
DC = 10	∠**ODC** = 90°

Calcula la medida **BC**.

20.- Sea **U** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. ¿Cuántos subconjuntos de **U** tienen entre sus elementos al 5?

21.- Se sabe que el producto de **1992** números naturales es **1992**.
¿Cuántos de dichos factores deben ser iguales a **1**? Da el mínimo y el máximo de este tipo de factores.

22.- Sean **A** = 1993! y **B** = 1993^{1993}. Decir cuál es el número de mayor valor ¿**A** ó **B**? Justifica tu respuesta.
Nota: **k!** Es el producto de los **k** primeros números naturales, **k! = 1·2·3···k**

23.- En la sucesión que está en la tabla escribe los siguientes tres términos y el "**n**-ésimo" término.

Número de término	Término
1	1/2
2	1/6
3	1/12
4	1/20
5	1/30
6	
7	
8	
.	.
.	.
.	.
n	

24.- Crucigrama Numérico.

En cada casilla deberá haber un solo dígito. Los números se leen de izquierda a derecha (horizontales) y de arriba abajo (verticales). La primera casilla (A, a) tiene un dígito que no es cero.

Horizontales

A. Potencia de 2.
B. Múltiplo de 100.
C. Tiene exactamente tres divisores.

Verticales

a. Potencia de 3.
b. Múltiplo de 11.
c. Primo.

	a	**b**	**c**
A			
B			
C			

25.- Sea $\mathbf{N} = \dfrac{10^{601} - 10}{9}$, decir si **N** es divisible entre:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 9 f) 11

26.- ¿Cuántos números hay, menores que 1000 y que tienen exactamente nueve divisores?

27.- Da las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, de tal manera que todos los lados sean un número **entero impar**.

28.- Demuestre que $\mathbf{n^3}$**-n** es siempre un múltiplo de 6, cuando **n** es un número entero.

29.- Sea **M** = (2**n** + 1)(**n** +1)**n**. Demuestra que para todo número natural **n**, **M** siempre es múltiplo de **6**.

30.- Demuestra que 8**n**($\mathbf{n^2}$ + 5) es divisible entre **48** para todo valor de **n** $\in$ **N** (**N** = {1,2,3,4,5,...}).

31.- Los ocho primeros números naturales pueden separarse en dos grupos de cuatro de tal manera que la suma de los cuadrados de un grupo sean igual a la suma de los cuadrados del otro:

$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$

Lo mismo pasa con otros conjuntos de ocho números naturales consecutivos. Por ejemplo:

$7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2$

Pedro trabajó durante muchas horas escogiendo grupos de números consecutivos y comprobó que cumplían con la propiedad señalada anteriormente (de hecho, comprobó el resultado con más de mil grupos de números consecutivos, y en todos los casos que escogió, la propiedad se cumplió). No obstante, él no pudo comprobar por este método que la propiedad era cierta para TODOS los conjuntos de ocho números consecutivos, por la sencilla razón de que hay una infinidad de tales grupos.

Demuestra que cualesquiera ocho números consecutivos pueden separarse en dos grupos de cuatro, de tal manera que la suma de los cuadrados de un grupo es igual a la suma de los cuadrados del otro.

32.- Demuestra que si n es un número natural, entonces $\mathbf{n! + (n+1)! + (n+2)!}$ es divisible entre $\mathbf{(n+2)^2}$.
Nota: **k!** Es el producto de los **k** primeros números naturales. $\mathbf{k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$.

33.- Mediante la utilización del producto notable:
$(x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + ... + y^{m-1}) = x^m - y^m$, si $\mathbf{m} \in \mathbf{N}$, es posible demostrar que $\mathbf{2^{3k} - 1}$ es divisible entre **7** y que $\mathbf{2^{2k} - 1}$ es divisible entre **3**, para todo valor de $\mathbf{k} \in \mathbf{N}$.

¿De qué forma debe ser $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ para que $\mathbf{2^n - 1}$ sea divisible entre **21**? Justifica tu respuesta.

34.- Un método para encontrar una infinidad de soluciones enteras (aunque no todas) para la ecuación $\mathbf{x^3 + y^3 = z^2}$ puede ser la siguiente:

a) Toma dos números enteros cualesquiera, por ejemplo 2 y 3.

b) Escribe una igualdad con la suma de sus cubos:
$2^3 + 3^3 = 35$

c) Multiplica a todos los términos de la igualdad por el cubo de la suma:
$2^3(35^3) + 3^3(35^3) = 35(35^3)$

d) Emplea las leyes de los exponentes para reescribir la igualdad:
$70^3 + 105^3 = 1225^2$

De esta manera se tiene que $\mathbf{x = 70}$, $\mathbf{y = 105}$, $\mathbf{z = 1225}$ es una solución.

Explica de forma similar el método para obtener una infinidad de soluciones enteras para la ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 = z^3}$ y construye tres soluciones distintas.

35.- Una compañía de teléfonos celulares asegura que la carga de cada uno de sus aparatos dura 90 minutos de conversación continua o hasta 15 horas en espera de llamada (línea libre).

Suponiendo cierto lo que afirma el anunciante, ¿cuánto tiempo duró en conversación un cliente si la carga se le término al cabo de 9 horas? (Advertencia: no son 36 minutos).

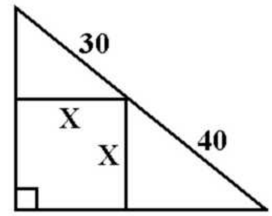
36.- Los Gómez y los Martínez se encuentran por la calle, y rápidamente se produce un efusivo intercambio de besos y abrazos. Cada uno de los Martínez saluda a cada uno de los Gómez. Al saludarse dos varones se dan un abrazo, mientras que al saludarse dos mujeres, o un hombre y una mujer, se dan un beso. Al final de la efusiva salutación se han producido 35 abrazos y 42 besos. ¿Cuántas mujeres y cuántos varones hay en cada familia?

37.- Una persona entró a una tienda con una cierta cantidad de dinero y gastó en ella las tres cuartas partes de éste. Al salir descubrió que tenía tantos centavos como pesos había tenido al entrar y tantos pesos como la cuarta parte de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero tenía al entrar?

38.- Todas mis camisas, excepto dos, son completamente blancas; también, todas mis camisas, excepto dos, son completamente azules; y, todas mis camisas, excepto son completamente amarillas. ¿Cuántas camisas tengo en total? Y si es posible, dime el color de cada una de ellas (Atención: La solución no es única).

39.- A lo largo de un camino se encontraba una cierta cantidad de piedras separadas entre si a intervalos de un metro. A un hombre le dejaron la tarea de apilar todas las piedras sobre la que ocupaba el lugar central, e inició el trabajo en uno de los extremos. (Nota: sólo puede llevar una piedra a la vez).

Al terminar con ello, había caminado 5 050 m. ¿Cuántas piedras había?



40.- Un punto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es tal que la distancia a los catetos es la misma y divide a la hipotenusa en segmentos de 30 y 40 cm. ¿Cuánto miden los catetos?

41.- Di por qué es cierto que:

Si $\mathbf{n > 0}$ entonces $\left(\mathbf{1+\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{n}} < \left(\mathbf{1+\frac{1}{2n}}\right)^{\mathbf{2n}}$

42.- ¿Qué valores enteros deberían tener **a** y **b** para que $\mathbf{x^2 - x - 1}$ sea un factor de $\mathbf{ax^5 + bx^4 + 1}$?

43.- Laberinto.

El recorrido se realiza pasando de una casilla a otra contigua que esté a su derecha o hacia abajo (nunca en diagonal, ni a la izquierda, ni hacia arriba).

En cada casilla hay una afirmación (que puede ser verdadera o falsa) pero en ningún momento la afirmación de una casilla puede contradecir a la de las casillas anteriores del camino recorrido (ni individualmente, ni de manera conjunta).

Los números **X** y **Y** a los que se refieren las afirmaciones son números naturales, es decir $\mathbf{X, Y} \in \mathbf{N} = \{1,2,3,...\}$

a) Encuentra un camino que no sea contradictorio, que empiece en la casilla INICIO y termine en la casilla FIN, fundamentando para cada casilla la razón por la que no escogiste la otra vía alterna.

b) Sabiendo que todas las afirmaciones del camino encontrado son verdaderas, calcula los valores de **X** y **Y**.

c) Sabiendo que todas las afirmaciones del camino encontrado son falsas, calcula los valores de **X** y **Y**.