S O L U C I O N E S

1.- Tomando en cuenta la primera condición, si existe un ganador, es porque los 1 022 socios restantes quedaron eliminados en otros tantos partidos. Por consiguiente sólo se emplearán 1 022 pelota nuevas, sin importar la manera en la que el torneo sea organizado.

2.- Según el problema hay dos partes de hermanos. Carolina y Juan; y, Margarita y Pedro; y uno de dichos pares está formado por gemelos (es claro que los gemelos no son univitelinos).

Uno de los gemelos comió la mayor porción y el otro no comió la menor. Además quienes comieron la mayor y la menor porciones son del mismo sexo. Esto es Juan y su hijo Pedro; o, Carolina y Margarita (no necesariamente en ese orden).

Pero quienes comieron la mayor y la menor porciones tienen la misma edad, concluimos que no pueden ser Juan y su hijo, por lo que deben ser Carolina y su sobrina (¡hay tres personas de la misma edad!).

Con lo anterior concluimos que:

- Los gemelos son Margarita y Pedro, y que uno de ellos se comió la mayor porción.
- Carolina y Margarita comieron la menor y la mayor porción y por la conclusión anterior, quién comió la mayor porción fue Margarita.

Así: Margarita comió $\frac{1}{3}$ de pastel; Carolina comió $\frac{1}{6}$ de pastel; Juan y su hijo Pedro comieron $\frac{1}{4}$ de pastel.

3.- Esta es la solución que da el autor del acertijo.

a) Los únicos días que el León puede decir "Ayer mentí" son los lunes y jueves. Los únicos días que el Unicornio puede decir "Ayer mentí" son los jueves y domingos. Por lo tanto, el único día en el que ambos pueden decir esto es el jueves.

b) El primer enunciado del león implica que el lunes o jueves. El segundo enunciado implica que no es jueves. Por lo tanto es lunes.

c) ¡En ningún día de la semana es esto posible! Solamente podría hacer el primer enunciado los lunes y los jueves; solamente podría hacer el segundo los miércoles y los domingos. Así pues, no hay ningún día en el que el León pueda hacer ambos enunciados.

d) ¡Esta es una situación muy diferente! Ilustra estupendamente la diferencia entre hacer dos enunciados separadamente y hacer un enunciado que sea la conjunción de los dos. En efecto, dados cualesquiera dos enunciados **X** y **Y** si el enunciado "**X** y **Y**" es verdadero, entonces se sigue, desde luego, que **X** y **Y** son verdaderos separadamente; pero si la conjunción "**X** y **Y**" es falsa, entonces solamente se sigue que al menos uno de ellos es falso.

Ahora bien, el único día de la semana en el que podría ser verdadero que el León mintió ayer y que mentirá mañana de nuevo es el martes (es éste el único día que hay entre dos de los días en los que al León le toca mentir). Así, el día en que el León dijo esto no podría ser martes, pues los martes ese enunciado es verdadero, pero el León no hace enunciados verdaderos los martes. Por lo tanto, no es martes, pues el enunciado del León sería falso, ya que el León está mintiendo. Por lo tanto el día tiene que ser o lunes o miércoles.

4.- Para que se dé esta situación de manera precisa es necesario que ocurra el incesto ya que ambos hermanos debieran ser el producto de la relación padre e hija o madre e hijo. En casi todas las leyendas o historias en las que se basan las religiones encontramos complicados parentescos múltiples. En esta situación está Edipo, quien, sin saberlo, se casó con Yocasta, su madre, y ambos tuvieron como hijos a Polícites, Antígona, Eteocles e Ismene, según la mitología griega.

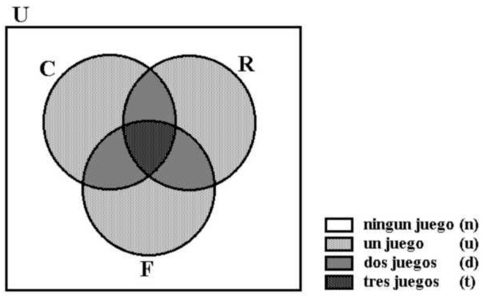
Sin embargo, si aceptamos el caso de medios hermanos podemos también tener dicha situación, con o sin incesto. Basta que mi medio hermano sea hijo de mi padre (o madre) y de mi abuela (o abuelo). El abuelo (o abuela) puede ser paterno o materno.

Existen otras posibilidades más si aceptamos los parentescos políticos (como el caso de que mi tía se case con mi hermano), o legales (si mi tío lo adoptan mis padres).

5.- Si representamos la situación mediante diagramas de Venn, donde **C** es el conjunto de personas que subieron a las cataratas, **R** el de las que subieron a la montaña rusa, y **F** el de las que subieron a la rueda de la fortuna, podemos separar cuatro tipos de personas: **n**, los que no subieron a los juegos; **u**, los que subieron solo a uno; **d**, los que subieron sólo a dos; y **t**, los que subieron a tres.

La primera parte del enunciado dice que **n = 5**. Por lo tanto:

$$\mathbf{u + d + t = 34} \qquad \text{Ecuación I}$$

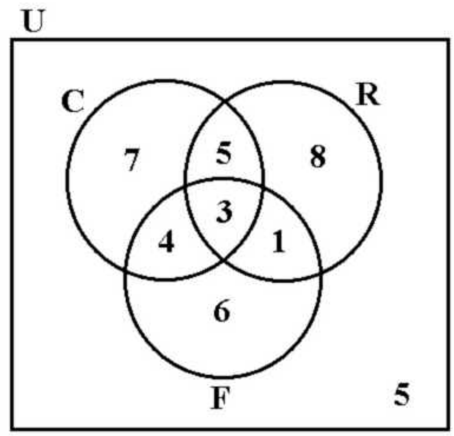


Si sumamos los que subieron a las cataratas (19), con los que subieron a la montaña rusa (17), y con los que subieron a la rueda de la fortuna (14), la suma da 50. Pero además de contabilizar a los que se subieron a un juego, estaremos contabilizando dos veces a los que subieron a dos juegos, y tres veces a quienes subieron a los tres. Lo anterior lo podemos simbolizar como:

$$\mathbf{u + 2d + 3t = 50} \qquad \text{Ecuación II}$$

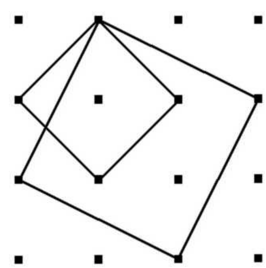
De manera similar, al sumar los que subieron a las cataratas y a la montaña rusa (8), con los que subieron a la montaña rusa y a la rueda de la fortuna (4), y con los que subieron a las cataratas y a la rueda de la fortuna (7), esta suma da 19, pero además de contabilizar a los que se subieron a dos juegos, estaremos contabilizando tres veces a los que se subieron a los tres juegos. Lo anterior se simboliza como:

$$\mathbf{d + 3t = 19} \qquad \text{Ecuación III}$$



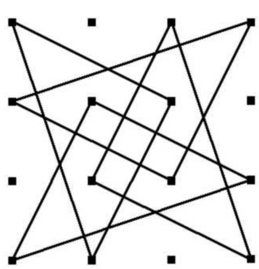
El sistema formado por las ecuaciones I, II y III tiene como solución a los valores **u = 21**; **d = 10**; **t = 3** que da inmediatamente las respuestas a lo pedido: **3 personas subieron a los tres juegos y 21 subieron solamente a un juego**.

Puede continuarse el análisis, a partir del valor de **t** para obtenerse la situación completa representada en el diagrama adjunto.



6.- a) Los únicos cuadrados que no tienen sus lados paralelos a la recta $\mathbf{L_1}$, ni a la recta $\mathbf{L_2}$ son aquellos cuyos lados miden $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$ unidades (ver figura).

En total hay **seis** cuadrados como los pedidos: del primer tipo hay **cuatro** cuadrados; y **dos** del segundo tipo.



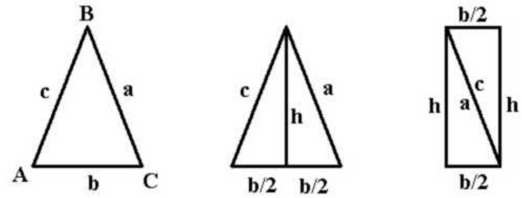
b) Los triángulos solicitados son **dieciséis**, todos ellos tienen catetos de $\sqrt{5}$ unidades, e hipotenusa de $\sqrt{10}$ unidades.

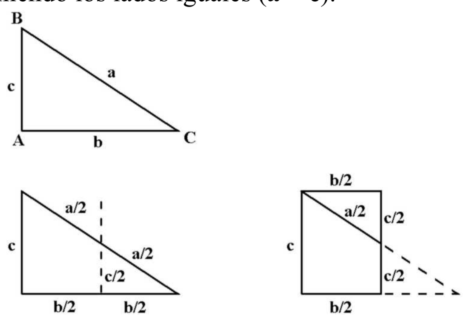
Cada uno de los cuadrados del segundo tipo, señalado en a), nos da cuatro triángulos, es decir, ocho; los ocho restantes se obtienen mediante traslaciones horizontales o verticales de los anteriores. En la figura están cuatro de éstos triángulos, los que corresponden a las traslaciones de los cuatro triángulos del cuadrado dibujado en a).

7.- En las letras que se encuentran sobre la línea tienen, todas ellas, algún segmento curvilíneo. Las letras **X**, **Y** y **Z**, no; tampoco las letras que se encuentran debajo de la línea, por ello el lugar de las tres últimas del abecedario, debe ser debajo de la línea. También se consideran como buenas a las respuestas cuya explicación determine de manera única a la ubicación de todas y cada una de las letras.

8.- Este es uno de los casos donde se pueden ejemplificar algunas de las estrategias heurísticas más comunes. Primero se resuelve un problema más sencillo (aquí, un triángulo isósceles y uno rectángulo) y después se aplican los conocimientos obtenidos para resolver el problema que se planteó originalmente.

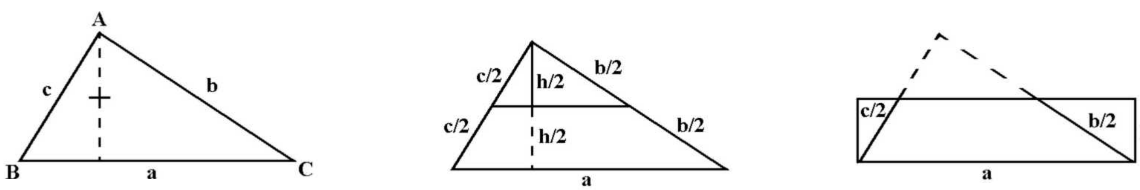
La solución es sencilla cuando se trata de un triángulo isósceles, basta con hacer un corte siguiendo la altura del lado desigual y colocar una pieza junto a la otra uniendo los lados iguales (**a = c**).





Si se trata de un triángulo rectángulo, también sería suficiente un corte, sólo que habría de hacerse siguiendo a la mediatriz (la mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento) de un cateto cualquiera y unir las piezas resultantes por los lados que pertenecen a la hipotenusa.

Pero el problema estaba planteado de una manera muy general, es decir, el triángulo podía ser de cualquier tipo. En este caso, se levantara la altura del lado mayor, y a la mitad de ella se corta el triángulo con una perpendicular, posteriormente habrá de hacerse un corte más siguiendo a la mitad superior de esta altura. Las dos piezas superiores se colocan sobre las partes que correspondían a sus respectivos lados.



9.- Debido a que las rectas **MN** y **RS** son paralelas, los ángulos **B** y **P** son suplementarios (sus medidas suman 180º). Por lo tanto, la medida del $\angle$ **P** = 70º.

Por otra parte, el $\angle$ **Q** es un ángulo exterior del triángulo que tiene como vértices a los de los ángulos $\angle$ **P**, $\angle$ **A** y $\angle$ **Q**, por lo que su medida corresponderá a la suma de los ángulos interiores que no le son adyacentes. Uno de ellos mide 70º, como ya se había indicado, el otro mide 100º por ser opuesto por el vértice el ángulo A. De esta manera, la medida del ángulo **Q** es 170º.

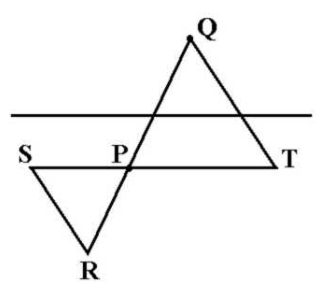
10.- Para este problema hay una cantidad inmensa de soluciones, por ejemplo señalar a los puntos **R**, **S** y **T** (en nuestra región) que cumplan con:

SR paralelo a **QT**. **S**, **P** y **T** alineados, formándose así triángulos semejantes.

De esta manera:

$$\frac{PQ}{RP} = \frac{PT}{SP}$$

$$\therefore \mathbf{PQ} = \frac{\mathbf{(PT)(RP)}}{\mathbf{SP}}$$



Observa que puedes medir la magnitud de los segmentos **PT**, **RP** y **SP** porque están todos ellos en tu región.

11.- Supongamos por un momento que los círculos pequeños están completamente fuera del círculo grande, y sin traslaparse entre ellos. Ante esta situación, la superficie **R** y **C** tendrían la misma medida, ya que:

R = $\pi(50)^2 = 2500\pi$ unidades cuadradas.

C = $\pi(40)^2 + \pi(20)^2 + \pi(20)^2 + \pi(10)^2 = 2500\pi$ unidades cuadradas.

Esta no es la situación planteada. Sin embargo, nos permite advertir algo muy importante.

Ahora, imaginemos que movemos uno de los círculos pequeños para traslaparlo con el grande: Las superficies **C** y **R** siguen siendo iguales ya que disminuyen exactamente en el mismo tamaño, es decir, la cantidad de la superficie con puntos que queda en blanco es la misma de la rayada que queda en blanco... ¡es la superpuesta!, y además no depende del sitio en el que se encuentre el centro, bien podríamos dejar el centro del círculo pequeño sobre la circunferencia del círculo mayor.

La misma situación se presentaría al colocar en su sitio cada uno de los pequeños círculos, siempre y cuando no haya traslapes entre éstos.

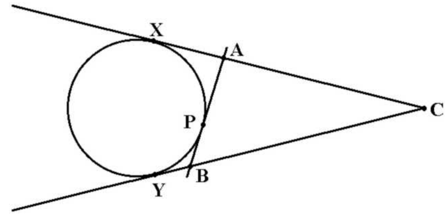
De acuerdo a lo anterior, la relación correcta es **R = C**.

12.- La recta que pasa por **A** y **B** es tangente a la circunferencia en **P**.

AX = **AP** y **YB** = **PB** por tratarse de segmentos tangentes desde un mismo punto exterior.

El perímetro del triángulo **ΔABC** es **AB** + **BC** + **CA**, pero:

CA = CX – AX
BC = YC – YB
AB = AP + PB



Sustituyendo a estos valores en el perímetro tenemos:

AP + PB + YC –YB + CX – AX

Sustituyendo también a los dos primeros términos, el perímetro queda:

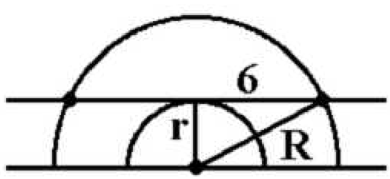
AX + YB + YC – YB + CX – AX

Que al simplificar da: **CX + YC**, como cada uno de estos segmentos mide 10cm, concluimos que el perímetro del triángulo **ABC** es de 20cm.

13.- Llamaremos **R** al radio de la semicircunferencia mayor, y **r** al de la menor. El área sombreada deberá ser:

A = $\frac{1}{2}\left(\pi R^2 - \pi r^2\right)$, que puede factorizarse como $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2\right)$.

Lo único que falta por saber es el valor de la diferencia $\mathbf{R^2 - r^2}$ para tener resuelto el problema. (Observa que nos basta el valor de la diferencia, aunque no sepamos cuáles son los valores de los radios).



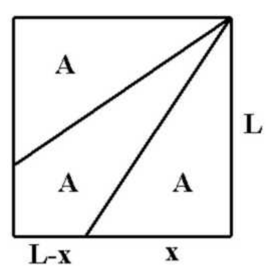
El triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro, el punto de tangencia y un extremo del segmento $\overline{\mathbf{MN}}$, permite hacer uso del teorema de Pitágoras para establecer que $\mathbf{r^2 + 6^2 = R^2}$. De aquí se tiene que el valor de la diferencia $\mathbf{R^2 - r^2 = 36}$, el cual requeríamos para encontrar el área sombreada:

A = $\frac{\pi}{2}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\pi}{2}(36)$ = **18π cm²**.

Seguramente te preguntarás sobre los valores de **R** y **r**. ¡Hay una infinidad de parejas de dichos valores! Pero en todos los casos donde $\mathbf{R^2 - r^2 = 36}$, una cuerda de la circunferencia mayor, que sea tangente a la menor, medirá 12cm.

14.- Se nos dice que las tres regiones son de igual área, es decir, cada una de ellas es la tercera parte del área del cuadrado. Si nos fijamos en el área de una de las regiones triangulares tendremos la ecuación:

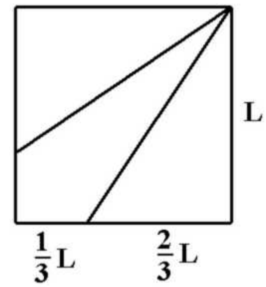
$$\frac{Lx}{2} = \frac{L^2}{3}$$



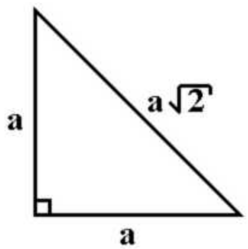
De ella despejamos a **x** y obtenemos:

$$x = \frac{2}{3}L$$

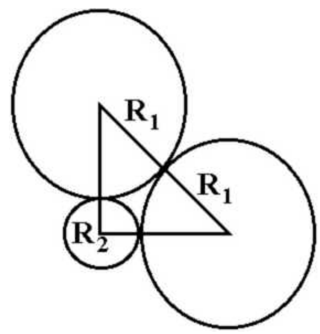
El lado del cuadrado quedará cortado a razón 1 a 2.



15.- Lo primero que debemos obtener, son las medidas de los lados del triángulo rectángulo isósceles.



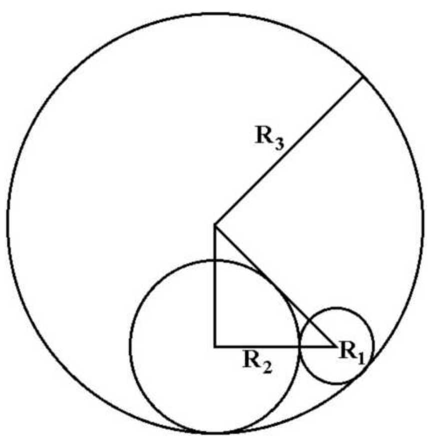
Los lados iguales deben ser los catetos, supongamos que éstos miden **a**. Por el teorema de Pitágoras obtenemos el valor de la hipotenusa: **a**$\sqrt{2}$. El área de este triángulo es: $\frac{\boldsymbol{a^2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{50}$ por lo tanto **a=10**.



Existen dos posibles situaciones. Una de ellas considera a las tres circunferencias tangentes exteriormente. En cuyo caso, y debido a la simetría de la figura, los radios de las circunferencias iguales coincidirán con la mitad de la hipotenusa. Así:

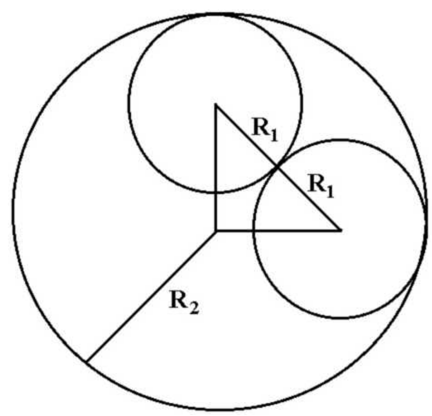
$$\boldsymbol{R_1} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \quad \text{por lo tanto} \quad \boldsymbol{R_1} = \frac{\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}$$

Este valor sumado con el radio de la tercera circunferencia, deberán medir lo mismo que uno de los catetos:



$$R_2 + R_1 = a$$
$$\therefore R_2 = a - R_1$$
$$\therefore R_2 = 10 - 5\sqrt{2}$$

La otra situación se presenta cuando dos de las circunferencias son tangentes entre sí exteriormente, pero ambas son interiores a la tercera circunferencia. En cuyo caso, el valor de R coincide con el de la situación anterior, pero:



.

Existe otra solución más, ¿cuál es? Ve la siguiente figura y calcula.

16.- Los lados de medidas **x** y **11** forman un triángulo rectángulo, lo mismo puede decirse de los dos lados restantes. Además, ambos triángulos rectángulos comparten una misma hipotenusa, por tanto:

$$x^2 + 11^2 = y^2 + 7^2$$
$$\therefore y^2 - x^2 = 72.$$

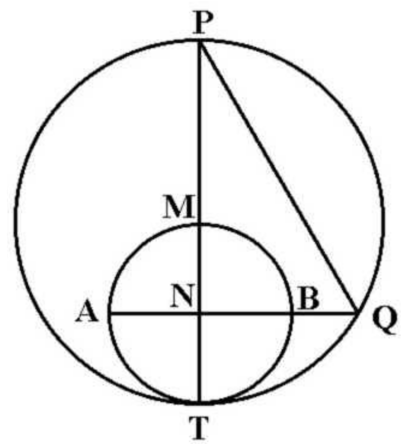
O equivalentemente: **(y + x)(y – x) = 72**.

Como **x** y **y** son números enteros, entonces cada uno de los paréntesis de la última ecuación debe corresponder con los posibles factores enteros de **72**. Cada factorización dará lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las que al resolverse nos darán las posibles medidas de los lados.

Factor de 72		Medidas de:		Observaciones
y + x	**y - x**	**x**	**y**	
72	1	—	—	No hay solución entera.
36	2	17	19	
24	3	—	—	No hay solución entera.
18	4	7	11	No son medidas distintas a las dadas.
12	6	3	9	No son medidas mayores a las dadas.
9	8	—	—	No hay solución entera.

Como puede verse, la única solución que cumple las condiciones pedidas es **x = 17 cm** y **y = 19cm**.

17.- Para las circunferencias mayor y menor, sean: **R** y **r** sus radios; **A** y **a** las áreas; y **M** y **N** sus centros, entonces sabemos que



$$\frac{a}{A} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ **R = 2r**

Como el **Δ PQT** es un triángulo rectángulo, se cumple que:

$PQ^2 = PT^2 - QT^2$.

Observa que **QT = QM**, por la simetría de la figura ya que:

2r = R.

Expresión que podemos sustituir por los valores de los radios:

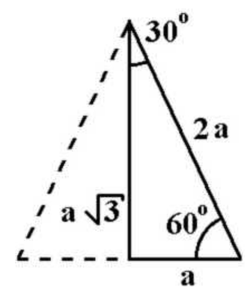
$PQ^2 = (2R)^2 - R^2$

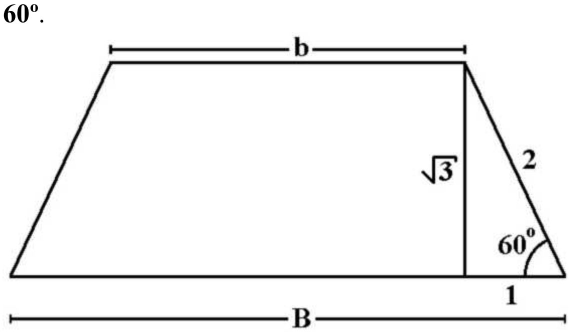
Y a su vez, empleando el resultado obtenido en la primera ecuación nos da:

$$PQ^2 = (2R)^2 - R^2$$

$\therefore$ **PQ = $2r\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$** cm

18.- Bisecando a un triángulo equilátero de lado **2a**, se tiene a un triángulo rectángulo de hipotenusa **2a**, catetos **a** y **a**$\sqrt{3}$, y con sus ángulos agudos de **30º** y **60º**.



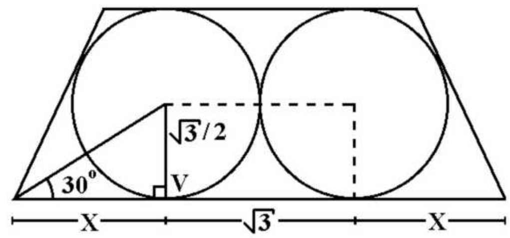


Al bajar en nuestro trapecio una perpendicular a la base mayor, desde un extremo de la base menor, se forma un triángulo de este tipo con hipotenusa **2**. Por tanto la altura del trapecio es **h** = $\sqrt{3}$ **,** y la base superior **b** es dos unidades menor que la base mayor **B**, esto es: **b = B –2**, ello se debe a que el cateto adyacente el ángulo de **60º** mide **1**. También podemos concluir que los radios de la circunferencia miden $\frac{\sqrt{3}}{2}$, la mitad de la altura.

Por otra parte, al examinar el triángulo formado por el centro de una circunferencia, el punto **V** y el vértice del ángulo a cuyos lados es tangente, vemos que se forma otro triángulo rectángulo semejante al anterior. De dicha semejanza podemos calcular el valor de **x** (ver la figura):

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$



Asimismo se ve que la base mayor es:

$$\mathbf{B} = 2x + \sqrt{3} = \mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\therefore \mathbf{b} = B - 2 = \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{3}}$$

Con estos resultados es fácil calcular el área:

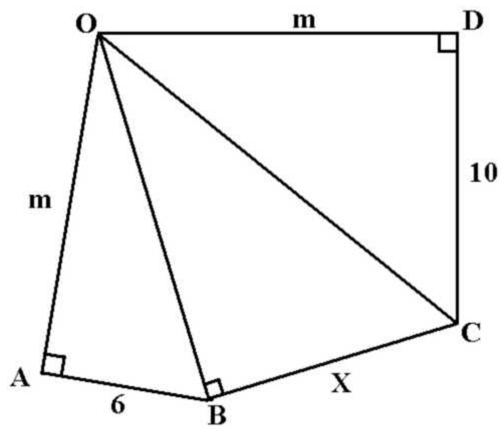
$$\mathbf{A} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{\left[(3+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\right]\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$$

19.- Sea **OA** = **m** = **O**D y sea **x** = **BC**, utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos que la hipotenusa del **ΔOAB** es $\sqrt{\mathbf{m}^2 + \mathbf{36}}$ y la hipotenusa del **ΔODC** es $\sqrt{\mathbf{m}^2 + \mathbf{100}}$.

Aplicando otra vez el teorema de Pitágoras en el **ΔOBC** obtenemos la siguiente ecuación:

$$m^2 + 36 + x^2 = m^2 + 100$$

$$\therefore \mathbf{x = 8.}$$



Nota: El hecho de que se cancele el valor de **m**, indica que hay una infinidad de pentágonos que cumplen con los datos del problema. En el caso del que el pentágono sea convexo, y no degenere en cuadrilátero ni triángulo, se cumple que $\mathbf{m} > \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$. ¿Por qué?

20.- La manera más simple de resolver este problema es utilizando el principio fundamental del conteo. Para cada uno de los elementos de **U** (excepto en el caso del elemento 5) tenemos dos opciones cuando queremos formar un subconjunto de **U**: tomarlo o no tomarlo.

Elementos de **U**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de opciones	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2

De esta manera, la cantidad de subconjuntos que podemos formar, con la condición pedida es:

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^9 = \mathbf{512}$.

21.- Al factorizar a **1992** en números primos se tiene que $\mathbf{1992 = 2^3\cdot3\cdot83}$. De aquí se puede ver que no puede haber más de cinco factores distintos de **1**, por tanto habrá cuando menos **1987** factores iguales a **1**.

Por otra parte, al menos debe haber un factor distinto de **1**, a saber **1992**, y los **1991** factores restantes deben ser iguales a **1**.

De lo anterior concluimos que como mínimo hay **1987** factores iguales a **1** y como máximo **1991**.

22.- Es muy sencillo expresar a ambos números como el producto de igual cantidad de factores (en este caso 1993).

$\mathbf{A} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1991 \times 1992 \times 1993$

$\mathbf{B} = 1993 \times 1993 \times 1993 \times \cdots \times 1993$

Se ve claramente, en el orden que se señala, que cada uno de los factores de **A** es menor que cada uno de los respectivos factores de **B**, excepción hacha del último de ellos, por lo tanto **A < B**.

23.- En la sucesión dada, todos los numeradores son iguales a la unidad y los denominadores corresponden al producto de dos enteros consecutivos, el primero de éstos es igual al número del término. Así:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{(1)(2)};\ \frac{1}{6}=\frac{1}{(2)(3)};\ \frac{1}{12}=\frac{1}{(3)(4)};\ \frac{1}{20}=\frac{1}{(4)(5)};\ \frac{1}{30}=\frac{1}{(5)(6)}$$

Y los términos pedidos son:

$$\frac{1}{(6)(7)}=\frac{1}{42};\ \frac{1}{(7)(8)}=\frac{1}{56};\ \frac{1}{(8)(9)}=\frac{1}{72}\ \ \mathbf{y}\ \ \frac{1}{n(n+1)}$$

24.- Crucigrama numérico.

	a	b	c
A	**2**	**5**	**6**
B	**4**	**0**	**0**
C	**3**	**6**	**1**

- **A** y **a**. Las únicas potencias de tres dígitos que tiene el **2** son 128, 256, y 512; y para el **3** son 243 y 729. Puesto que deben coincidir en su primer dígito, la respuesta en **A** es **256**, y en **a** es **243**. Seto llena las casillas (**A**,**a**), (**A**,**b**), (**A**,**c**), (**B**,**a**), (**C**,**a**).
- **B**. Al ser un múltiplo de 100, sus dos últimos dígitos deben ser cero. Así, la respuesta en **B** es **400**. Con lo que se cubren las casillas (**B**,**b**), (**B**,**c**).
- **b**. El único múltiplo de 11 que está entre 500 y 509 es el **506**. Esto llena la casilla (**C**,**b**).
- **C** y **c**. Los únicos primos que están entre 600 y 609 son 601 y 607. Ello da dos posibilidades para **C**, 361 y 367, el primero tiene tres divisores (1, 19 y 361) y el segundo es primo. Así, en la casilla (**C**, **c**) debe ir el número **1**.

25.- $$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{10^{601}-10}}{\mathbf{9}}=\frac{\mathbf{10(10^{600}-1)}}{\mathbf{9}}$$

a) El valor encerrado entre paréntesis es un número natural con 600 nueves, que al dividirlo entre nueve y multiplicarlo por diez, hace que N sea un número natural con 600 unos y un cero:

$$\underbrace{1111...111}_{600\ unos}0$$

por lo tanto **es divisible entre 2 y entre 5**.

b) Sabemos que un número natural escrito en base 10, es múltiplo de tres sí y sólo si la suma de sus dígitos es también un múltiplo de tres. En este caso la suma de los dígitos es 600, por lo que concluimos que **sí se trata de un múltiplo de 3**.

c) Ya está resuelto en el inciso **a)**.

d) N es un número par, por terminar en cero, y por el inciso a sabemos que es divisible entre tres. De esta manera, también **es múltiplo de 6**.

e) Un número escrito en base 10, es divisible entre nueve sí y sólo si la suma de sus números es un múltiplo de nueve. En este caso, 600 no es divisble entre nueve, por tanto, **N no es divisible entre 9**.

f) Si intentamos dividir a N entre 11, se aprecia directamente que existen 300 parejas de dígitos que sí lo son. Así al dividir obtendremos residuo cero y como cociente a un número formado por 300 parejas de "10".

$$\begin{array}{r} 1\ 01\ \ldots 01\ 01\ 01\ 0 \\ 11\overline{)11\ 11\ \ldots\ 11\ 11\ 11\ 0} \end{array}$$

Es, en efecto, **múltiplo de 11**.

26.- Sabemos que cualquier número natural lo podemos factorizar en potencias de números primos de una única manera. Así, cualquier número **N** podrá expresarse como:

$$\mathbf{N = P_1^{a_1}\ P_2^{a_2}\ P_3^{a_3}\ \ldots\ P_r^{a_r}}$$

En la expresión anterior $\mathbf{P_1, P_2, ..., P_r}$ son números primos distintos, y $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ..., a_r}$ son sus respectivas potencias.

Cualquier combinación de potencias de ellos (sin que rebasen a los exponentes señalados) será un divisor del número **N**. Esto significa que al primo $\mathbf{P_1}$ se le puede tomar como factor en cualquiera de las siguientes potencias: $\mathbf{0, 1, 2, ..., a_1}$.

Es decir, se puede tomar de $\mathbf{a_1 + 1}$ formas para la combinación. Análogamente para el primo $\mathbf{P_2}$ se puede tomar su exponente de $\mathbf{a_2 + 1}$ formas. Lo mismo sucederá con todos los demás.

Así, la cantidad de divisores D, vendrá dada por:

$$\mathbf{D = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_r + 1)}$$

Como **D** debe ser **9**, este número sólo puede obtenerse de dos maneras: $\mathbf{D = 9}$ ó $\mathbf{D = 3 \cdot 3}$; la primer manera nos indica que solamente existe un posible primo, con exponentes 8 (ya que $\mathbf{D = 8 + 1}$); otra posibilidad es que sólo haya dos números primos, ambos con exponentes 2, ya que $\mathbf{D = (2 +1)(2 +1) = 3 \cdot 3 = 9}$. Resolviendo para cada posibilidad obtenemos:

I) Que $\mathbf{N = P^8}$ donde **P** es un número primo. Pero como **N** es menor que 1000, entonces $\mathbf{P = 2}$, es decir, sólo lo cumple el número 256.

II) Que $\mathbf{N = P_1^2\ P_2^2}$ donde $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ son números primos distintos, cuyo producto debe ser menor que $\mathbf{\sqrt{1000}}$. Así, los valores de **N** serán:

$(2\cdot3)^2$, $(2\cdot5)^2$, $(2\cdot7)^2$, $(2\cdot11)^2$, $(2\cdot13)^2$, $(3\cdot5)^2$ y $(3\cdot7)^2$

III) De esta manera sabemos que en total hay 8 números que cumplen la condición pedida:

36, 100, 196, 225, 256, 441, 486, 676.

27.- Sean **a** y **b** los catetos, y **c** la hipotenusa. El teorema de Pitágoras asegura que $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$. Ahora bien:

- Al elevar al cuadrado un número impar, el resultado es también un número impar.
- Al sumar dos números impares el resultado siempre da un número par.

Por consiguiente, la suma del primer miembro de la igualdad $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ será un número par mientras que el segundo es un número impar. Por lo tanto no puede existir un triángulo con las propiedades pedidas.

28.- Al factorizar la expresión $\mathbf{n^3 - n}$ obtenemos el producto de tres números naturales consecutivos:

$$\mathbf{n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)}$$

de esta manera, al menos uno de ellos es múltiplo de **2**; y también, uno de ellos es múltiplo de **3**, por lo tanto el producto debe ser múltiplo de **6**.

29.- Se trata de demostrar que **M** es múltiplo de **6**, eso significa que **M** debe ser un número **par** y múltiplo de **3**.

Es claro ver que **M** siempre es un número par, ya que tiene entre sus factores a dos números naturales consecutivos, **n** y **n + 1**, y necesariamente uno de ellos es par.

Ahora sólo nos queda por demostrar que alguno de los otros factores es múltiplo de 3. Para ello conviene hacer notar que **n** siempre podrá escribirse como $\mathbf{n = 3k + r}$, donde **k** es un natural, y $\mathbf{r = 0}$,**1**, ó **2**. [Por ejemplo 27 = 3(9) + 0; 28 = 3(9) + 1; 29 = 3(9) + 2; 30 = 3(10) + 0; etc.].

Como $\mathbf{M = n(2n + 1)(n + 1)}$, vemos que:

a) Si $\mathbf{r = 0}$, **n** es múltiplo de **3**, ya que $\mathbf{n = 3k}$.
b) Si $\mathbf{r = 1}$, $\mathbf{2n + 1}$ es múltiplo de **3**, pues:

$$\mathbf{2n + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1).}$$

c) Si $\mathbf{r = 2}$, $\mathbf{n + 1}$ es múltiplo de **3**, puesto que:

$$(3k + 2) + 1 = 3k + 3 = 3(k+1).$$

Entonces, para cualquier valor de **n**, **M** siempre tendrá entre sus factores a un múltiplo de **3**, esto significa que **M** es múltiplo de **3**.

Por tanto, **M** es par y múltiplo de **3**, es decir **M** es múltiplo de **6**.

30.- Como $\mathbf{8n(n^2 + 5)}$ es divisible **8** bastará demostrar que $\mathbf{n(n^2 + 5)}$ es divisible entre **6**.

$$n(n^2 + 5) = n(n^2 - 1 + 6) = n(n^2 - 1) + 6n.$$

El segundo término es divisible entre **6**, por lo tanto el primero también debe serlo para que la suma sea divisible entre **6**.

En efecto, $\mathbf{n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)}$ que es el producto de tres enteros consecutivos ya que $\mathbf{n \in N}$.

Al menos uno de ellos es múltiplo de **2** y también uno de ellos es múltiplo **3**. Por tanto el producto es divisible entre **6**.

Así, $\mathbf{8n(n^2 + 5)}$ es divisible entre **8** y entre 6, por lo tanto es divisible entre **48** si $\mathbf{n \in N}$.

31.- Los números consecutivos **a**, **a + 1**, **a + 2**, **a + 3**, **a + 4**, **a + 5**, **a + 6**, **a + 7**, pueden separarse siempre en dos conjuntos que cumplen con los solicitado:

$$\{a, a + 3, a + 5, a + 6\} \text{ y } \{a + 1, a + 2, a + 4, a + 7\}$$

En efecto:

$$a^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + (a+7)^2$$

$$a^2 + a^2 + 6a + 9 + a^2 + 10a + 25 + a^2 + 12a + 36 = a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 8a + 16 + a^2 + 14a + 49$$

$$4a^2 + 28a + 70 = 4a^2 + 28a + 70$$

Así, la suma de los cuadrados de los números que pertenecen a cada uno de los conjuntos es $\mathbf{4a^2 + 28a + 70}$.

Nota.- El resultado que acabamos de obtener es un caso particular de otro más amplio: cualquier conjunto de ocho términos consecutivos de una progresión aritmética puede separarse en dos conjuntos de cuatro elementos cada uno, de tal amera que coincidan las sumas de los cuadrados de los términos de cada uno de los conjuntos.

32.-

$$(n+1)! = (n+1)(n!)$$
$$(n+2)! = (n+2)(n+1)(n!)$$

Así, sea: $\mathbf{P = n! + (n+1)! + (n+2)!}$, entonces: $\mathbf{P = n! + (n+1)(n!) + (n+2)(n+1)(n!)}$ que tiene como factor común a **n!**, al factorizar nos da: $\mathbf{P = n!(1 + (n+1) + (n+2)(n+1))}$ que podemos simplificar como $\mathbf{P = n!(n^2 + 4n + 4)}$.

Factorizando el trinomio cuadrado del paréntesis nos da de inmediato el resultado que queríamos obtener: un múltiplo de $\mathbf{(n+2)^2}$; $\mathbf{P = n!(n+2)^2}$.

33.- Demostraremos que si $\mathbf{n = 6k}$, con $\mathbf{k \in N}$, entonces $\mathbf{2^n - 1}$ es divisible entre **21**, porque:

1) $\mathbf{2^{6k} - 1 = (2^2)^{3k} - 1 = 4^{3k} - 1 = (4-1)(4^{3k-1} + 4^{3k-2} + ... + 4 + 1) = 3(4^{3k-1} + 4^{3k-2} + ... + 4 + 1)}$, que es múltiplo de 3.
2) $\mathbf{2^{6k} - 1 = (2^3)^{2k} - 1 = 8^{2k} - 1 = (8-1)(8^{2k-1} + 8^{2k-2} + ... + 8 + 1) = 7(8^{2k-1} + 8^{2k-2} + ... + 8 + 1)}$, que es múltiplo de 7.

3) Según lo anterior, 2^{6k} **-1** es múltiplo de **3** y múltiplo de **7**, por tanto, 2^{6k} **-1** es múltiplo de **21**.

Ahora demostraremos que si $2^n - 1$ es divisible entre **21,** entonces **n = 6k:**

$$2^n - 1 = 2^{6k+r} - 1, r \in [0,1,2,3,4,5]$$

$$.\ 2^{6k+r} - 1 = 2^{6k+r} + 2^r - 2^r - 1$$

$$2^{6k+r} - 1 = 2^r(2^{6k} - 1) + 2^r - 1$$

$2^r(2^{6k} - 1)$ es divisible por 21 dado lo que habíamos demostrado, y $2^r - 1$ sólo es divisible entre 21 cuando r = 0 (con r =1 obtenemos 1, con r =2 obtenemos 3 , con r =3 obtenemos 7, con r = 4 obtenemos 15, y con r = 5 obtenemos 31) por lo tanto **n** debe ser igual a **6k** para ser divisible entre 21.

34.- Un método para encontrar una infinidad de soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^3$ (aunque no todas) puede ser la siguiente:

a) Tomar dos números cualesquiera, por ejemplo a y b.

b) Escribir una igualdad con la suma de sus cuadrados:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)}$$

c) Multiplicar todos los términos por el cuadrado de la suma:

$$\mathbf{a^2(a^2 + b^2)^2 + b^2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2)^2}$$

d) Reescribir usando las leyes de los exponentes :

$$\mathbf{[a(a^2 + b^2)]^2 + [b(a^2 + b^2)]^2 = (a^2 + b^2)^3}$$

De esta manera se tiene siempre una solución con:

$$\mathbf{x = a(a^2 + b^2);\ y = b(a^2 + b^2);\ z = a^2 + b^2}$$

Podemos ahora dar tantas soluciones como queramos, simplemente asignando los valores a **a** y **b**. Por ejemplo:

a	b	x	y	z	Ecuación
1	1	2	2	2	$2^2 + 2^2 = 2^3$
1	2	5	10	5	$5^2 + 10^2 = 5^3$
3	1	30	10	10	$30^2 + 10^2 = 10^3$
2	3	26	39	13	$26^2 + 39^2 = 13^3$

35.- Se sabe que la carga de 90 minutos de conversación es igual a la carga de 900 minutos de línea libre, esto es que, 1 minuto de conversación equivale a 10 minutos de línea libre.

Lo anterior puede decirse de la siguiente manera: **x** minutos de conversación equivalen a **10x** minutos de línea libre.

Como la carga duró 540 minutos, hay una faltante de 360 minutos de línea libre, cuya correspondiente carga debió utilizarse en conversación.

Con la información anterior concluimos que el tiempo que habló (**x**) más 360 minutos debe ser igual a **10x**:

$$\mathbf{x + 360 = 10x}$$

$$\therefore \mathbf{x = 40 minutos}$$

36.- Debido a que cada uno de los Gómez saluda a cada uno de los Martínez, el total de saludos (independientemente de que sean besos o abrazos) será igual al producto es 77 (42 besos y 35 abrazos), el problema se reduce a encontrar dos números que multiplicados den 77. Los únicos pares de números cuyo producto es 77 son: 77 con 1, y 7 con 11.

La primera posibilidad (77 miembros en una familia y uno en la otro), nos indica que el único miembro del que consta una familia debe ser hombre (de lo contrarío habrían abrazos), mientras que en la otra familia habrán 42 mujeres y 35 hombres.

Para la segunda posibilidad (11 miembros en una familia y 7 en la otra), tenemos que el producto del número de varones de una familia por el de la otra debe ser igual a 35 (número de abrazos), que puede descomponerse en **5 × 7**, y, **53 × 1**. El último caso no es compatible con los datos de la segunda posibilidad que manejamos, ya que en ninguna de las familias hay tantas personas.

Así pues, en una familia hay 5 varones y en la otra 7, que a su vez, al calcular el número de mujeres nos produce dos soluciones más. De esta manera concluimos que el problema tiene tres soluciones:

	Familia numerosa		**Familia pequeña**	
	Varones	**mujeres**	**varones**	**mujeres**
1ª solución	**35**	**42**	**1**	**0**
2ª solución	**5**	**6**	**7**	**0**
3ª solución	**7**	**4**	**5**	**2**

37.- Si decidimos emplear el álgebra para resolver este problema, debemos simbolizar cada uno de los elementos, y las relaciones que se presentan en el enunciado. Así, por una parte están los objetos (billetes y monedas):

P = número de pesos que tenía al entrar a la tienda.
C = número de centavos que tenía al entrar a la tienda.

Por otra parte, las cantidades de dinero que representan dichos objetos:

P = cantidad de dinero que tenía **con los pesos** al entrar a la tienda.
C/100 = cantidad de dinero que tenía **con los centavos** al entrar a la tienda.

Teniendo muy clara la separación entre el número (y tipo) de objetos y las unidades monetarias que representan tales objetos, se continúa la simbolización:

P + C/100 = cantidad de dinero con el cual entró a la tienda.

Como gastó las tres cuartas partes, le quedó la cuarta parte del dinero

$$\textbf{(A)...}\ \frac{\mathbf{(P + C/100)}}{\mathbf{4}} = \text{cantidad de dinero con que salió de la tienda.}$$

$$\mathbf{C/4} = \text{número de pesos que tenía al salir de la tienda.}$$

$$\mathbf{P} = \text{número de centavos que tenía al salir de la tienda.}$$

$$\mathbf{C/4} = \text{cantidad de dinero que tenía } \textbf{con los pesos} \text{ al salir de la tienda.}$$

$$\mathbf{P/100} = \text{cantidad de dinero que tenía } \textbf{con los centavos} \text{ al salir de la tienda.}$$

$$\textbf{(B)...}\ \mathbf{C/4 + P/100} = \text{cantidad de dinero que tenía al salir de la tienda.}$$

Con las expresiones (A) y (B) representan a la misma cantidad, podemos igualarlas. Así:

$\dfrac{\mathbf{(P + C/100)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{C/4 + P/100}$, de esta ecuación se concluye que $\mathbf{32P = 33C}$, pero sabemos que $\mathbf{0 \le C \le 99}$, ya que 100 centavos harían otro peso.

De la última igualdad se sabe que **P** es múltiplo de 33 (**P = 33k**), y que **C** es múltiplo de 32 (**C = 32k**). Donde **k** es el mismo número en ambos casos, de otra manera no se conservaría la igualdad. Además, como hay de 0 a 99 centavos, esto es: $\mathbf{0 \le 32k \le 99}$.

Así, **k** sólo puede tomar los valores **0**, **1**, **2** y **3**. Cada uno de estos cuatro valores genera una solución:

	Valores para			Dinero al entrar	Dinero gastado	Dinero al salir
	k	**P**	**C**			
1ª solución	0	0	0	$\$\ 0.^{00}$	$\$\ 0.^{00}$	$\$\ 0.^{00}$
2ª solución	1	33	32	$33.^{32}$	$24.^{99}$	$8.^{33}$
3ª solución	2	66	64	$66.^{64}$	$49.^{98}$	$16.^{66}$
4ª solución	3	99	96	$99.^{96}$	$74.^{97}$	$24.^{99}$

38.- Si todas las camisas son blancas, excepto dos, entonces entre azules y amarillas sólo hay dos, una de cada una. Repitiendo el mismo razonamiento para las azules y las amarillas, concluimos que tiene una de cada color, por lo tanto habrá tres camisas. Lo anterior, explicado con el apoyo del álgebra es:

Variables:

t = total de camisas.
x = número de camisas blancas.
y = número de camisas azules.
z = número de camisas amarillas.

Ecuaciones:

$$t - 2 = x$$
$$t - 2 = y$$
$$t - 2 = z$$

Como en las tres ecuaciones el primer término es el mismo, concluimos que **$x = y = z$** (hay la misma cantidad de camisas blancas que de azules y que de amarillas).

Por otra parte, estamos suponiendo que **solamente se tienen de esos colores (condición que NO está dada en el problema)**, el total de camisas será **$t = x + y + z$**, o lo que es lo mismo **$t = 3x$**. Pero de la primera ecuación sabemos que **$t = x + 2$**. Al igualar los segundos términos de estas dos igualdades obtenemos **$t = 3$**, **x** $= 1$ (por tanto **$y = z = 1$**).

Es muy importante buscar la simplicidad, pero también conviene ser suspicaz. En este caso, la solución supuso algo que **no** aseguraba: "**Solamente hay camisas blancas, azules y amarillas**". Si aceptamos la posibilidad de que existen camisas de otros colores (lo que no niega el enunciado del problema), hará falta una incógnita más:

w = número de camisas de color distinto al de las anteriores.

Con las tres primeras ecuaciones, que son referentes a las condiciones del problema, se obtiene, como ya lo habíamos hecho, que **$x = y = z$**. Sin embargo, el total de camisas es: **$t = x + y + z + w$**, o lo que es lo mismo: **$t = 3x + w$**, que al sustituirlo en la segunda ecuación nos da la igualdad **$3x + w - 2 = x$**.

De esta última igualdad, al despejar **w**, podremos obtener todas las posibles soluciones de varios enteros no negativos para: **$w = 2 - 2x$**.

Así, **$x = 1$**; **$y = 1$**; **$z = 1$**; **$w = 0$**, que habíamos encontrado ya.

O bien, **$x = 0$**; **$y = 0$**; **$z = 0$**; **$w = 2$**, que es otra solución.

Esta última solución tiene una interpretación que a muchos les parece sumamente sofisticada: "Sólo tengo dos camisas, ninguna de las dos es completamente blanca, ni azul ni amarilla". Por ejemplo una lila y una naranja. Todas, excepto dos (la lila y la naranja), es decir, **cero** con blancas; todas excepto dos (las mismas que habíamos dicho, la lila y la naranja), es decir, **cero** son azules; todas, excepto dos (¡ya adivinaron cuales?), es decir, **cero** son amarillas.

39.- Para recoger y depositar una piedra cualquiera (exceptuando la primera), deberá caminar el doble de la distancia a la que está se encuentra del centro. Al existir una piedra central entonces hay una cantidad impar de piedras, digamos **$2n + 1$**, a las que podemos representar, de acuerdo a la distancia a la distancia que se encuentran del centro, de la siguiente manera:

$$n\ .\ .\ .\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ .\ .\ .\ n$$

Así, para la piedra que está a **i** metros del centro, requerirá caminar **2i** metros (**i** para recogerla, e **i** para depositarla). De acuerdo a esto, la distancia en metros, que recorrerá para las piedras del lado derecho será **2(1) + 2(2) + 2(3) + ... + 2(n),** y otro tanto para las del lado izquierdo, por lo que la distancia total de metros recorridos es:

$$\mathbf{D = 2[2(1) + 2(2) + 2(3) + ... + 2(n)] - n}$$

Observa que la resta del último término se debe a que empezó en una de las piedras que está en el extremo, y no requirió ir por ella, ahorrando así **n** metros.

Al factorizar el **2**, que es común a todos los sumandos del paréntesis se tiene:

$$\mathbf{D = 4[1 + 2 + 3 + ... + n] - n}$$

Por otra parte, la suma que está dentro del paréntesis es $\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}$, por ser una progresión aritmética.

Al sustituir dicho valor nos da $\mathbf{D} = \frac{4n(n+1)}{2} - n = \mathbf{2n^2 + n = 5050}$.

De la última igualdad se obtiene la ecuación cuadrática $\mathbf{2n^2 + n - 5050 = 0}$, cuyas soluciones son 50 y –50.5, obviamente la solución que nos interesa es **n = 50**.

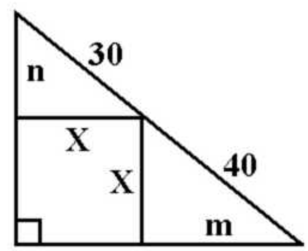
Por lo que en total hay **2(50) + 1 = 101** piedras, 50 a cada lado de la que ocupa el lugar central.

40.- Sean **m + x**, y **n + x** los catetos.

De acuerdo al teorema de Pitágoras obtenemos las ecuaciones:

I... $\mathbf{m^2 + x^2 = 40^2}$.

II... $\mathbf{n^2 + x^2 = 30^2}$.



Por semejanza de triángulos sabemos que:

$$\mathbf{\frac{n}{x} = \frac{x}{m} = \frac{30}{40}}$$

De aquí obtenemos las ecuaciones:

III... $\mathbf{40x = 30m}$

IV... $\mathbf{40n = 30\ x}$

La ecuación III puede escribirse como $16x^2 = 9m^2$, en ella se sustituye el valor de $\mathbf{m^2}$, que se despeja de la ecuación **I**, quedando:

$$\mathbf{16x^2 = 9(40^2 - x^2)}$$

$$\mathbf{\therefore 25x^2 = 14400}$$

$$\mathbf{\therefore x = 24}$$

Al sustituir el valor de **x** en las ecuaciones **III** y **IV** nos permiten obtener los valores de **m** y **n**, siendo éstos:

m = 32 y **n = 18**.

Con los valores de **m**, **n** y **x** obtenemos las medidas de los catetos: **56** y **42 cm**.

41.- Se sabe que si $\mathbf{a^n < b^n}$ con a, b y n positivos entonces **a < b**. Lo cual aplicamos a la desigualdad y obtenemos que:

$$\mathbf{1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2}$$

Al desarrollar el segundo miembro tenemos que:

$$1+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}$$

Restando $1+\frac{1}{n}$ a ambos miembros se obtiene:

$$0<\frac{1}{4n}$$

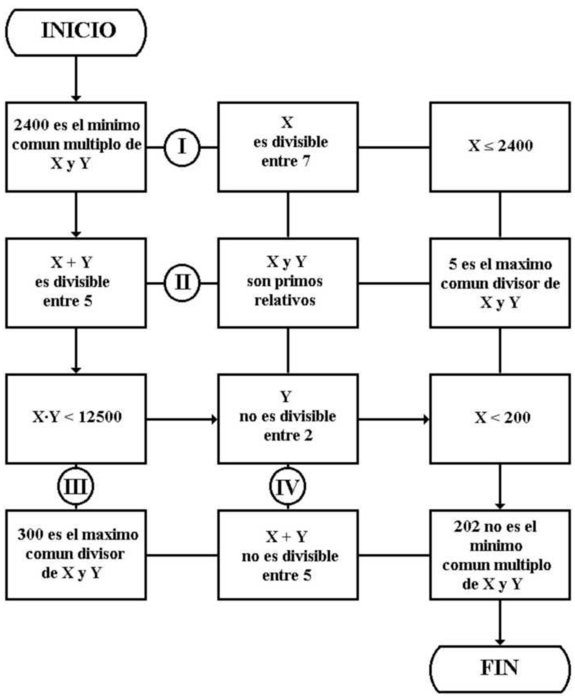
Esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo valor de **n**. Así, yendo hacia atrás podemos demostrar lo pedido.

42.- Al efectuar la división de ax^5+bx^4+1 entre x^2-x-1, obtenemos como residuo **(5a + 3b)x + 3a + 2b + 1**. Pero como x^2-x-1 debe ser un factor del primer polinomio, el residuo debe ser cero. De esta manera se obtienen las ecuaciones:

$$5a + 3b = 0$$
$$3a + 2b = -1$$

Que al resolverlas nos dan la respuesta: **a = 3**; **b = -5**.

43.-



a) El diagrama muestra la solución:

Los círculos son las vías alternas que no se escogieron debido a lo siguiente:

I. Puesto que **2400** = $2^5 \times 3 \times 5^2$, y al ser éste el mínimo común múltiplo de **X** y **Y**, sólo pueden contener potencias de los factores primos de ellos y el 7 no es divisor de 2400, por lo tanto tampoco es divisor de **X**.

Si **X** y **Y** fuesen primos relativos habría una contradicción con la conjunción de las dos casillas anteriores, ya que de acuerdo a la casilla anterior, el 5 debe ser divisor de **X** o de **Y**, o de ambos; y en esta casilla se afirma que **X + Y** es divisible entre 5, es decir, tanto **X** como **Y** deben ser divisibles entre 5.

I. Si **300** fuese el máximo común divisor de **X** y **Y**, **X·Y** deberá ser mayor o igual a **90 000**, lo que contradice al hecho de que **X·Y < 12 500**. Este razonamiento no sería necesario si observaras lo señalado en el siguiente párrafo.

II. "**X + Y** no es divisible entre **5**" es una franca contradicción con "**X + Y** es divisible entre **5**". Observa que a esta contradicción, aunada a las condiciones que debe seguir el camino, es condición suficiente para no elegir el camino señalado con III.

A partir de aquí, el resto del camino es obligado y además las dos últimas casillas de éste no contradicen a las anteriores.

b) Al ser verdadero lo que afirma la primera casilla, los números **X** y **Y** deberán escribirse como el producto de potencias enteras no negativas de los primos 2, 3 y 5, y además, sus respectivos exponentes no deberán ser mayores que 5, 1 y 2, ya que **2400** = $2^5 \times 3 \times 5^2$. Desde luego que el mayor exponente de los primos mencionados deberá alcanzarse, sea en **X** o en **Y**. Por otra parte, de acuerdo a lo que informa la cuarta casilla del camino encontrado, a **Y** le corresponde exponente **0** (cero) para el primo **2**; lo que obliga a **X** tener al **5** como exponente del primo **2**.

La segunda casilla advierte que el exponente del primo 5 debe ser mayor o igual a 1, tanto para X como para Y.

Así, $\mathbf{X} = 2^5 \cdot 3^a \cdot 5^{b+1}$ con $0 \le a \le 1, y, 0 \le b \le 1$

$\mathbf{Y} = 3^\alpha \cdot 5^{\beta+1}$ con $0 \le \alpha \le 1, y, 0 \le \beta \le 1$

Además, el máximo de **a** y **α** debe ser 1, y, el máximo de **b** y **β** también deber ser 1.

La información de la quinta casilla del camino, **X** < **200**, es decir $2^5 \cdot 3^a \cdot 5^{b+1} = 160 \cdot 3^a \cdot 5^b < 200$ da de inmediato una única posibilidad: **b = 0** (que obliga **β = 1**), y **a = 0** (que obliga **α = 1**).

Así, $\mathbf{X} = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^{1+0} = \mathbf{160}$, y $\mathbf{Y} = 3^1 \cdot 5^{1+1} = \mathbf{75}$. Lo único que resta es verificar que dicha posibilidad cumple con lo que afirman las proposiciones de las casillas tercera y última, lo cual es cierto pues **X·Y** = 12 000<12 500, y 202 no es el mínimo común múltiplo de **X** y **Y** (pues éste es 2 400).

c) Puesto que son falsas las afirmaciones de las casillas, en particular lo de la última, se tiene que 202 **sí** es el mínimo común múltiplo de **X** y **Y**.

Además, descomponiendo en factores primos, 202 = 2 × 101, y usando la información de la cuarta casilla del camino, **Y sí** es divisible entre 2, entonces **Y** = 2 ó **Y** = 202.

Con la información de las últimas dos casillas del camino, obtenemos que **X = 202**.

De la anterior, y sabiendo que $\mathbf{X \cdot Y} \ge 12500$ (por ser falso lo que afirma la tercera casilla) se concluye que la única posibilidad debe ser **X = 202** y **Y = 202**.

Esta posibilidad **sí** es una solución, ya que evidentemente hace falsas a las afirmaciones de las dos primeras casillas del camino (las únicas que nos faltaban por comprobar).