Combinatoria
Sábado 16 de Abril del 2011
Principios de Conteo
Francisco Javier Gutiérrez Gutiérrez

Principio fundamental de conteo:
Si una cierta tarea se puede realizar de **m** maneras diferentes y para cada una de esas maneras una segunda tarea puede realizarse de **n** maneras diferentes, entonces las 2 tareas juntas pueden realizarse de **m** x **n** maneras diferentes.

¿Cuántas palabras diferentes puedo formar con las letras 'a' y 'b' (no deben tener significado las palabras)

- A
  - A
    - A → AAA
    - B → AAB
  - B
    - A → ABA
    - B → ABB
- B
  - A
    - A → BAA
    - B → BAB
  - B
    - A → BBA
    - B → BBB

<u>2(a,b)</u> x <u>2(a,b)</u> x <u>2(a,b)</u> = 8 = 2^3

m=2, n=2 m x n=4
m=4, n=2 m x n=8

Cabe mencionar que el principio fundamental de conteo se aplica cuando se quiere la tarea 1 **Y** la tarea 2, por ello se multiplica **m** x **n,** si se quisiera realizar la tarea 1 **O** la tarea 2 se sumaria **m** + **n,** por ejemplo:

Se tienen 3 pantalones y 4 camisas, a) ¿ de cuantas formas diferentes se puede escoger un pantalón y una camisa? B) ¿de cuantas formas se puede escoger una prende cualquiera, es decir, un a pantalón o una camisa?

a)
Tenemos 3 pantalones y 4 camisas y queremos escoger 1 de cada uno, por lo tanto:
m=4, n=3 → m x n = 12 formas diferentes de escoger pantalón y camisa.

b)
tenemos 3 pantalones y 4 camisas y queremos escoger 1 pantalón o una camisa:
m=4, n =3 → m + n= 7 formas de escoger una prenda cualquiera.

¿Cuántos numeros de 4 cifras hay?

1 cifra: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
para 2 cifras, podemos colocar a lado de cada uno de ellos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
es decir por cada una de las 10 opciones que teníamos hay 10 mas, entonces
2 cifras: 10x10=100
3 cifras: 100x10=1000
4 cifras: 1000x10=10000

¿Cuántas placas (2 letras, 3 números) podemos formar? (suponga 27 letras)

$\underline{27} \times \underline{27} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} = 72^2 \times 10^3 = 729000$

¿Cuántas banderas bicolores(2 colores diferentes) se pueden formar si se dispone de 4 lienzos de color(azul, rojo, verde, blanco) y un asta?

Para el primero color tenemos 4 lienzos disponibles, para el 2do color solo tenemos 3 lienzos debido a que los lienzos deben de ser de distinto color, por lo tanto:

4 x 3 = 12

Realizar el problema anterior pero sin asta(rojo-azul = azul-rojo)

Para cada par de colores, hay un opuesto:

Rojo-azul = azul-rojo
Rojo-verde = verde-rojo
Rojo-blanco = blanco-rojo
Azul-verde = verde-azul

Azul-blanco = blanco-azul
Verde-blanco = blanco-verde

por lo tanto la cantidad de banderas bicolores sin asta será la mitad de la cantidad que hay con asta:

12/2 = 6

¿de cuantas formas se pueden sentar 5 personas en 5 silla numeradas?

La primera persona se puede sentar en 5 sillas posibles, la 2da persona solo tendrá 4 opciones, la 3ra, tendrá 3 lugares posibles, la 4ta 2, y la 5ta se sentara en el que sobre.

Por lo tanto tenemos:

5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 = 5!
N **factorial o N!** Es la multiplicación de todos los números desde 1 hasta n:

N! = 1 x 2 x 3 x … x N

Por definición 0! = 1
1! = 1
2! = 1 x 2 = 2
3! = 1 x 2 x 3 = 6

Generalizando el problema anterior:

¿de cuantas formas podemos acomodra n objetos en n lugares numerados?

N x N-1 x N-2 x … x 1 = N!

Cada uno e estos acomodos se denomina "**Permutación",** el numero de permutaciones de n objetos es igual a n!
Cabe resaltar que las permutaciones es de suma importancia el orden de los objetos.

¿cuántas palabras distintas de 7 letras se pueden formar con las letras: a,b,c,d,e,f,g, a) sin repetir letras, b) repitiendo letras?

a)
7x6x5x4x3x2x1 = 7! = 5040

b)
$7x7x7x7x7x7x7 = 7^7 = 823543$

¿De cuantas fomras podemos escoger 3 alumnos de 5 posibles para ir a 3 museos diferentes?

Para el primer museo tenemos 5 posibles alumnos, para el 2do tenemos 4 y para el 3ro nos quedan 3 opciones, por lo tanto:

5x4x3 = 60

¿y si los museos son iguales, es decir, no se diferencia a cual va cada quien?

podemos observar que la cantidad de formas de acomodar 3 niños en los respectivos museos es precisamente la cantidad de permutaciones = 3!

123, 132, 213, 231, 312, 321 – 6 formas

Para este problema nos da igual el orden en el que estén los niños, por lo tanto las 6 permutaciones valdria solo por una diferente ya que las 6 contienen a los mismos niños, entonces tendremos que dividir el resultado anterior entre 3!

60/6 = 10 → 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 – 10 formas.
Cada uno de estos acomodos en los que no nos importa el orden en el que aparezcan los elementos se denomina "**Combinación".**

Generalizando

El numero de permutaciones de r elementos tomados de n posibles es:

n x n-1 x n-2 x … x n-(r-1)

el numero de combinaciones de r elementos tomados de n posibles es:

$$\frac{n \times n-1 \times n-2 \times \ldots \times n-(r-1)}{r!}$$

¿cuántas palabras diferentes puedes formar con las letras a,a,a,b,b,c,c,c usando todas las letras?

La cantidad de letras es igual a 8, por lo tanto la cantidad de permutaciones es
8! = 40320

pero como tenemos letras repetidas, supongamos que numeramos las b's

a a a b1 b2 c c c = a a a b2 b1 c c c
b1 a a a c c c b2 = b2 a a a c c c b1

y sucede lo mismo con las demas letras repetidas, por lo tanto cada permutación se repite el numero de letras repetidas factorial, es decir, hay 2 b's, por lo tanto hay 2! Formas de acomodar la b, por lo tanto hay 2! Permutaciones repetidas, en el caso de a y la c, hay 3! Permutaciones repetidas para cada una, por lo tanto:

la cantidad de palabras seria igual a 8! / (3! x 3! x 2!) = 560

Suponga que tenemos un conjunto x = [a,b,c,d,e] , n = 5

Encuentre la cantidad de conjuntos de 0,1,2,3,4,5 elementos.(no importa el orden)

0 elementos: hay una manera de no escoger nada.
1 elemento: aplicando la formula (**n) x (n-1) x (…) x (n-(r-1)) / r!** → 5/1! = 5
2 elementos: 5x4/2! = 10
3 elementos: 5x4x3/3! = 10
4 elementos: 5x4x3x2/4! = 5
5 elementos: 5!/5! = 1

como podemos observar existe cierta simetría en los resultados.
Las combinaciones con r elementos es igual a las combinaciones con n-r elementos.

Tenemos 5 pelotas(3 rojas, 2 azules), ¿de cuantas formas distintas podemos acomodarlas en linea?

Existen 2 maneras de resolver este problema, una es con permutaciones y la otra con combinaciones.

Forma 1(permutaciones):

Al igual que en el problema en el que se repetirán las a's, tenemos 3! Formas de acomodar las pelotas rojas y cada una de esas formas es lo mismo para este caso ya que no hay distinción en las pelotas, es decir:

A1 R1 A2 R2 R3
A1 R1 A2 R3 R2
A1 R2 A2 R1 R3
A1 R2 A2 R3 R1
A1 R3 A2 R1 R2
A1 R3 A2 R2 R1

Todas los acomodos anteriores son iguales, ya que las pelotas son iguales, por lo tanto no se diferencia una pelota roja de otra.

Por lo tanto:

5! / (3! x 2!) = 10

Forma 2(combinaciones):

Tenemos 5 lugares para acomodar las pelotas, 3 de esos lugares son para pelotas rojas y los otros 2, son para las azules, podemos escoger 3 lugares de 5 posibles con la formula

5 x 4 x 3 / 3! = 10

y las pelotas azules quedaran automáticamente asignadas a los lugares restantes.

Ahora supongamos que solo se acomodaran 3 pelotas(sin importar el color)

Para esto tendremos que hacer suposiciones:
Se escogen 3 rojas: hay 3! Formas de acomodarlas, y 3! Permutaciones seran iguales, por lo tanto 3! / 3! = 1 forma de acomodar 3 rojas.
Se escogen 2 rojas y 1 azul: 3! / 2! = 3
Se escogen 1 roja y 2 azules: 3! / 2! = 3

Por lo tanto la cantidad de acomodos distintos sera la suma de las 3 posibilidades:
3+3+1= 7

Problemas

1. Si tenemos una baraja con 52 cartas, con 13 de cada palo como se conoce comúnmente ¿Cuántos se pueden hacer de cada uno de los siguientes sin importar el orden en que se escojan las cartas?
   1.1. Pares (dos cartas con el mismo número) $\frac{52 \bullet 3}{2!} = 78$
   1.2. Dos pares $\frac{53 \bullet 3 \bullet 48 \bullet 3}{2! \bullet 2! \bullet 2!} = 2808$
   1.3. Tercias (tres cartas con el mismo número) $\frac{52 \bullet 3 \bullet 2}{3!} = 52$
   1.4. Full (un par y una tercia) $\frac{52 \bullet 3 \bullet 48 \bullet 3 \bullet 2}{2! \bullet 3!} = 3744$
   1.5. Póker (cuatro cartas con el mismo número) 13
   1.6. Color (cuatro cartas con el mismo color) $\frac{52 \bullet 25 \bullet 24 \bullet 23}{4!} = 29900$
   1.7. Escalera (4 cartas consecutivas) $10 \bullet 4^4 = 1560$
2. Un entrenador de fútbol va a seleccionar para su equipo dos delanteros y cuatro defensas y a las pruebas se presentan cinco delanteros y seis defensas. Tres de los delanteros y cuatro de los defensas son diestros y el resto son zurdos.
   2.1. ¿De cuántas maneras se puede escoger el equipo de manera que al menos uno de los delanteros sea zurdo? **7 • 15 = 105**
   2.2. ¿De cuántas maneras se puede escoger el equipo de manera que exactamente dos de los delanteros sean diestros? **3 • 15 = 45**
   2.3. ¿De cuántas maneras se puede escoger el equipo de manera que haya al menos dos delanteros y 2 defensas diestros? **3 • 15 = 45**
3. En Aguascalientes las placas se forman de 3 letras seguidas de 4 dígitos. Las letras son 26 y los dígitos naturalmente son 10 (0,1,...,9).
   3.1. ¿Cuántas placas diferentes se pueden formar? $26^3 \bullet 10^4 = 175760000$
   3.2. Si fueran 3 dígitos y luego 4 letras, el primer dígito no podría ser 0 ¿Cuántas placas se podrían formar? $26^4 \bullet 10^2 \bullet 9 = 411\ 278\ 400$
4. En una bolsa se tienen 5 fichas verdes, 4 rojas y se extraen 3 al azar.
   4.1. ¿De cuántas maneras se pueden sacar todas del mismo color? **3**
   4.2. ¿De cuántas maneras se pueden que sean de diferentes colores? **3 • 2+1=7**
   4.3. ¿De cuántas maneras se pueden sacar dos verdes y una roja? **1 si no son diferencían, si se diferencían las pelotas son 40**
5. Si se tiene un conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, ¿Cuántos subconjuntos tiene contándose a sí mismo y al conjunto que no tiene elementos? 2^n
6. ¿Cuántos números de 10 cifras capicúas (que se leen de derecha a izquierda igual que de izquierda a derecha) existen? $9 \bullet 10^4 = 90000$
7. En un juego se usan fichas de colores que tienen valores diferentes: 2 fichas blancas equivalen a 3 fichas amarillas, 1 ficha amarilla vale lo

mismo que 5 rojas, 3 rojas valen lo mismo a 8 negras y las fichas negras valen 15 puntos. ¿De cuántas maneras se pueden tener 560 puntos, si no es posible tener más de 5 fichas de cada color? **Son dos maneras: una Amarilla, una Blanca, y 4 negras; una Blanca, 4 Rojas y 4 negras**

8. De todos los subconjuntos de 7 elementos de {1,2,...,10}, ¿cuál es la suma de todos los elementos mayores de cada uno de esos conjuntos? $1 \bullet 2^0 + 2 \bullet 2^1 + ... + 10 \bullet 2^9 = 9217$
9. ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas? $\frac{8!}{5! \bullet 3!} = 56$
10. ¿De cuántas formas se pueden escoger ocho enteros a_1, a_2,…, a_8 no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_8 \leq 8$? $\frac{16!}{8! \bullet 8!} = 12870$
11. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20!? $(18+1)(8+1)(4+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^4 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 9 \bullet 19 = 41040$