Álgebra

Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez

Martes 03 de Agosto del 2010

1 Sumas telescópicas

1.1 Introducción

Muchas de las sumas pueden calcularse al agrupar los términos de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} [F(k+1) - F(k)]$$

donde $F(n)$ es una función que se define según convenga.

De manera que cada uno de los términos $F(k)$, para k entre 2 y $n-1$, se cancelan, dejando la suma igual a $F(n+1) - F(1)$. Para mostrar esto más claro vamos a desarrollar la suma anteriormente expuesta:

$$\sum_{k=1}^{n} [F(k+1) - F(k)] = [F(2) - F(1)] + [F(3) - F(2)] +$$

$$+ [F(4) - F(3)] + \ldots + [F(n) - F(n-1)] + [F(n+1) - F(n)]$$

En la suma anterior podemos agrupar de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} [F(k+1) - F(k)] = F(n+1) + [F(n) - F(n)] + [F(n-1) - F(n-1)] +$$

$$+ [F(n-2) - F(n-2)] + \ldots + [F(3) - F(3)] + [F(2) - F(2)] - F(1)$$

Como se puede ver cada par de términos entre corchetes se cancela y como resultado nos queda:

$$\sum_{k=1}^{n} [F(k+1) - F(k)] = F(n+1) - F(1)$$

Lo realmente importante es encontrar la función adecuada para poder resolver el problema.

1.1.1 Ejemplo:

Encuentra el valor de:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

1.1.2 Solución:

Consideremos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Ahora tomemos $F(n)=\frac{1}{n}$, de aquí sigue:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{n}F(n)-F(n+1)=F(1)-F(n+1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

1.2 Problemas

1. Encuentra el valor de la siguiente suma:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+n}$$

2. Encuentra el valor de:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}$$

3. Deduce cuánto vale:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!$$

4. Prueba que:

$$\left(1-\frac{1}{1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

5. Encuentre el valor de:

$$1!\left(1^2+1+1\right)+2!\left(2^2+2+1\right)+3!\left(3^2+3+1\right)+\ldots+k!\left(k^2+k+1\right)$$

6. Calcule la siguiente suma:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$$

7. Pruebe que la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}+...<2$$

8. Mostrar que:

   (a)
   $$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$$

   (b)
   $$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}<2$$

1.3 Soluciones

1. Usando la identidad de la suma de los primeros n números consecutivos tenemos:

   $$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow\frac{1}{1+2+\ldots+n}=\frac{1}{\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]}=\frac{2}{n(n+1)}.$$

   De aquí sigue que la expresión que nos pide el problema la podemos expresar de la siguiente manera:

   $$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=2\left[\frac{n}{n+1}\right]$$

   Y según el problema de ejemplo podemos concluir.

2. Usando la identidad:

   $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

   (la cual se puede verificar fácilmente), podemos cambiar toda la expresión a:

   $$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{n^2+n-2}{4}$$

3. Nos fijamos que:

   $$n\cdot n!=(n+1-1)\cdot n!=(n+1)\cdot n!-n!=(n+1)!-n!$$

   Así que la expresión cuyo valor nos pide encotrar el problema se puede escribir como:

   $$2!-1!+3!-2!+\ldots+n!-(n-1)!+(n+1)!-n!=(n+1)!-1!=(n+1)!-1.$$

4. Veamos que:
$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n+1)\cdot(n-1)}{n\cdot n}$$
Por lo que la expresión planteada en el problema se puede poner como:
$$\prod_{i=2}^{n}\left[\frac{i-1}{i}\right]\prod_{i=2}^{n}\left[\frac{i+1}{i}\right]=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

5. Se puede escribir la expresión de la siguiente manera:
$$\sum_{k=1}^{n}k!\left(1+k+k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}k!\left((k+1)^2-k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)\cdot(k+1)!-k\cdot k!\right]=(n+1)\cdot(n+1)!-1\cdot 1!=(n+1)\cdot(n+1)!-1$$

6. Para un número positivo n se puede escribir lo siguiente:
$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{\left(n^2+n+1\right)^2}{n^2(n+1)^2}$$
$$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n\cdot(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}$$
Y la expresión que se plantea en el problema se puede expresar de la siguiente manera y según el problema de ejemplo concluir:
$$\sum_{k=1}^{1999}\left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]=1999+\left[\frac{1999}{2000}\right]=2000-\frac{1}{2000}$$

7. Es natural transformar los términos de la suma como se indica:
$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$
Esto nos permite reescribir la suma como:
$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}<1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=2$$
Como podemos ver, la primera expresión propiamente no se puede tomar como una suma telescópica pero la podemos acotar por una expresión mayor la cual si se ve como una suma telescópica cuyos términos para $n>1$ se eliminan.

8. Veamos:

   (a) Es fácil ver:

   $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

   Por otro lado:

   $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}\right.$$

2 Toma el Conjugado

2.1 Introducción

Una famosa factorización, comunmente conocida como "diferencia de cuadrados" $\left(a^2-b^2=(a+b)(a-b)\right)$ nos da la oportundidad de quitar algunas raíces que podrían no permitir un manejo algebraico simple de algunas expresiones. Si tenemos por ejemplo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ su conjugado es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y al multiplicarlos nos queda lo siguiente:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

Muchas el multiplicar y dividir por el conjugado de una expresión nos ayuda a racionalizar, como por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

2.1.1 Ejemplo:

Sea m un número real. Resuleva para x la siguiente ecuación:

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$$

2.1.2 Solución:

Nos fijamos que si $x=0$ entonces: $\sqrt{1+0}=0+\sqrt{1-0}\iff 1=1$ por lo que esta es una solución. De ahora en adelante suponemos $x\neq 0$.

Despejamos x y multiplicamos por el conjugado de la resta de términos que nos queda del lado izquierdo de la igualdad:

$$\left(\sqrt{1+mx}\right)^2-\left(\sqrt{1-mx}\right)^2=x\left(\sqrt{1+mx}+\sqrt{1-mx}\right)$$

Desarrollando nos queda:

$$1+mx-1+mx=2mx=x\left(\sqrt{1+mx}+\sqrt{1-mx}\right)$$

Como supusimos $x\neq 0$ podemos dividir ambos lados entre x:

$$2m=\sqrt{1+mx}+\sqrt{1-mx}\Longrightarrow(2m)^2=\left(\sqrt{1+mx}+\sqrt{1-mx}\right)^2$$

$$\Longrightarrow 4m^2 = 1 + mx + 2\sqrt{(1+mx)(1-mx)} + 1 - mx$$

$$\Longrightarrow 2m^2 = 1 + \sqrt{1 - m^2x^2} \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{1-2m^2}$$

2.2 Problemas

1. Evalua la suma:
$$\frac{1}{1(\sqrt{2})+(2)\sqrt{1}}+\frac{1}{2(\sqrt{3})+(3)\sqrt{2}}+\frac{1}{3(\sqrt{4})+(4)\sqrt{5}}+...+\frac{1}{k(\sqrt{k+1})+(k+1)\sqrt{k}}$$

2. Pruebe la siguiente desigualdad:
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>48$$

3. Sean a y b números reales distintos. Resuelva la ecuación:
$$\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-a^2}=a-b$$

4. Demostrar que:
$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}>\frac{9}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{998^2}+\sqrt[3]{998\cdot 999}+\sqrt[3]{999^2}}<\frac{9}{2}$$

5. Resuelva la siguiente ecuación, donde m es un número real:
$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=m\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

6. Para cualquier entero positivo n se define:
$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
Encuentre cuánto vale $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(40)$.

2.3 Soluciones

1. Racionalizando tenemos:
$$\frac{1}{k\cdot\sqrt{k+1}+(k+1)\cdot\sqrt{k}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{[(k+1)^2\cdot k]-k^2\cdot(k+1)}=$$
$$=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
Así que la expresión planteada en el problema la podemos cambiar por:
$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-1}{\sqrt{k+1}}$$