PROBLEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Por: ELÍAS LOYOLA CAMPOS

1. En un recinto del zoológico se tienen dos tipos de animales: avestruces y jirafas. Hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo? (Obviamente, todos los animales son normales y están sanos.)

2. En una tienda de ropa, donde todos los pantalones tienen el mismo precio y las blusas también, en cada compra bonifican 20% más $10. Norma compró un pantalón y una blusa y le bonificaron $86, su mamá compró un pantalón y dos blusas y le bonificaron $121. ¿Cuál es el precio de los pantalones y cuál es el de las blusas?

3. Una persona entró a una tienda con una cierta cantidad de dinero y gastó en ella las tres cuartas partes de éste. Al salir descubrió que traía tantos centavos como pesos había tenido al entrar y tantos pesos como la cuarta parte de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero tenía al entrar?

4. Un tío le dijo a su sobrino: “Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, en ese momento, nuestras edades sumarán 63 años.” ¿Cuáles son las edades de ellos actualmente?

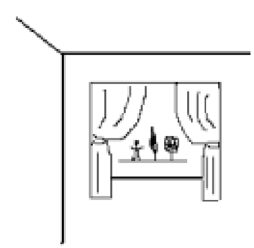
5. En dos dimensiones, una ecuación con dos incógnitas, representa a una recta en el plano. Si las rectas no son paralelas, entonces el sistema tiene como solución a las coordenadas del punto de intersección. Si las rectas son distintas y paralelas, entonces el sistema no tiene solución. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un valor a determinar.

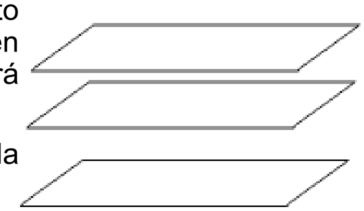
$$3x + 2y = 5$$
$$2x + ky = 3$$

a) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el sistema no tenga solución?

b) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el sistema tenga como solución una abscisa de valor -3?

6. En tres dimensiones, una ecuación con tres incógnitas, representa a un plano en el espacio. Dos planos se cortan en una recta, es decir, si tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, entonces es de esperarse que haya una infinidad de soluciones porque una recta tiene una infinidad de puntos. Cuando tres planos se cortan en un punto, decimos que el sistema tiene una solución única, por ejemplo si los tres planos están formados por dos paredes y el techo, el punto donde se cortan todos es el rincón “donde las arañas hacen su nido”. Si los tres planos son paralelos, el sistema no tendrá solución, pero no es el único caso.





Ilustra otros casos, y da un ejemplo de ecuaciones de cada uno de los casos que señalas.

7. La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días; y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?[1]

---

[1] Perelman, Yakov. Álgebra Recreativa. (Descárgalo en http://www.sectormatematica.cl/libros.htm)

1. Resolver este problema por ensayo y error, esto es “al tanteo”, nos obligaría a probar diferentes valores para los animales. Desde luego que habrá quien lo intente hacer sin sistema, haciendo propuestas sin ningún orden; otros quizá procedan de manera sistemática, teniendo como guía a los datos: puesto que 30 ojos equivalen a 15 animales (suponemos que tienen dos ojos pues son normales, tampoco hay tuertos pues están sanos), y probarán primero con 0 jirafas y 15 avestruces para ver si la suman de las patas es 44; si no funciona, después probarán con 1 jirafa y 14 avestruces; luego 2 jirafas y 13 avestruces, etcétera, hasta que le atinen. Desde luego que el sistema es mejor si permite aproximarnos cada vez más rápido a la solución.

Otra manera de resolverlo es mediante el álgebra. Si llamamos j al número de jirafas y a al número de avestruces, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + j &= 15 \quad \text{animales} \\ 2a + 4j &= 44 \quad \text{patas} \end{aligned}$$

Ahora examinemos una solución aritmética: Supongamos que estos animales son tan inteligentes que pueden comprender lo que les digamos, pero que no lo son tanto y nos obedecen cuando les ordenamos algo. Así, si les diéramos la orden “párense en dos patas”, ¿cuántas patas habría en el piso? Obviamente 30, un par por cada animal. ¿Cuántas patas habría en el aire? Es fácil calcular que serán 44 - 30 = 14, es decir, todas menos las que están en el piso. A qué tipo de animales pertenecen las patas que están en el aire? ¡Claro que a las jirafas! Ello significa que hay 7 jirafas, por lo tanto habrá 8 avestruces. Espero que con este ejemplo, quede claro que la forma de resolver un problema no es única.

2. Llamemos p al precio de los pantalones y b al de las blusas. A Norma le bonificaron \$86, lo cual significa que el 20% del costo de un pantalón y una blusa es de \$76; por lo tanto el costo de un pantalón y una blusa es de \$380, lo que podemos representar con la ecuación $p + b = 380$.

A su mamá le bonificaron \$121, es decir, el 20% del costo de un pantalón y dos blusas es de \$111, por lo tanto el costo de un pantalón y dos blusas es de \$555, lo que podemos representar con la ecuación $p + 2b = 555$.

Ahora, solamente queda resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p + b &= 380 \\ p + 2b &= 555 \end{aligned}$$

Se puede utilizar cualquiera de los métodos tradicionales: por ejemplo, al restar la primera ecuación de la segunda se obtiene $b = 175$. Si este valor se sustituye en la primera ecuación y se despeja a p, queda $p = 205$. Por tanto, El precio de los pantalones es de \$205 cada uno y el de las blusas es de \$175.

3. Si decidimos emplear el álgebra para resolver este problema, debemos simbolizar cada uno de los elementos, y las relaciones que se presentan en el enunciado. Así, por una parte están los objetos (billetes y monedas):

$P =$ Número de pesos que tenía al entrar a la tienda.

$C =$ Número de centavos que tenía al entrar a la tienda.

Por otra parte, las cantidades de dinero que representan dichos objetos:

$P =$ Cantidad de dinero que tenía con los pesos al entrar a la tienda.

$C/100$ = Cantidad de dinero que tenía con los centavos al entrar a la tienda. (¡Hay que tiempos aquellos...! un centavo es la centésima parte de un peso y aunque lo dudes, se podían comprar cosas con ellos.)

Teniendo muy clara la separación entre el número (y tipo) de objetos y las unidades monetarias que representan tales objetos, se continúa la simbolización:

$P + C/100 =$ cantidad de dinero con la cual entró a la tienda.

Como gastó las tres cuartas partes, le quedó la cuarta parte de dinero

(A)................ $\dfrac{P + C/100}{4} =$ Cantidad de dinero con la que salió de la tienda.

$C/4 =$ Número de pesos que tenía al salir de la tienda.

$P =$ Número de centavos que tenía al salir de la tienda.

$C/4 =$ Cantidad de dinero que tenía con los pesos al salir de la tienda.

$P/100 =$ Cantidad de dinero que tenía con los centavos al salir de la tienda.

(B)................$C/4 + P/100 =$ Cantidad de dinero que tenía al salir de la tienda.

Como las expresiones A y B representan a la misma cantidad, podemos igualarlas. Así,

$\dfrac{P + C/100}{4} = C/4 + P/100$, de esta ecuación se concluye que

$32P = 33C$, pero sabemos que $0 \le C \le 99$, ya que 100 centavos harían otro peso.

De la última igualdad se sabe que P es múltiplo de 33 (P=$33k$), y que C es múltiplo de 32 (C=$32k$). Donde k es el mismo número en ambos casos, de otra manera no se conservar1a la igualdad. Además, hay de 0 a 99 centavos, esto es $0 \le 32k \le 99$. Así, k sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Cada uno de estos cuatro valores genera una solución:

	Valores para			Dinero al	Dinero	Dinero al
	k	p	C	entrar	gastado	salir
1a. solución	0	0	0	$ 0.00	$ 0.00	$ 0.00
2a. solución	1	33	32	$33.32	$24.99	$ 8.33
3a. solución	2	66	64	$66.64	$49.98	$16.66

4a. solución	3	99	96	$99.96	$74.97	$24.99

4. Aquí parece haber varias incógnitas: La edad del tío, la del sobrino, el tiempo que ha pasado desde que el tío tenía la edad del sobrino, y el tiempo que pasará cuando el sobrino tenga la edad del tío. Aunque estos últimos no son valores que nos piden, además valen lo mismo.

x = edad actual del tío

y = edad actual del sobrino

t = tiempo que ha pasado cuando el tío tenía la edad que ahora tiene el sobrino. Este tiempo es el mismo que habrá de transcurrir para que el sobrino tenga la edad que ahora tiene el tío, y se corresponde con la diferencia de edades entre ellos.

Además:

$x - t$ = edad del tío hace t años. Observa que este valor debe ser y.

$y - t$ = edad del sobrino hace t años

$x + t$ = edad del tío dentro de t años

$y + t$ = edad del sobrino dentro de t años. Observa que este valor debe ser x.

De aquí, como ya dijimos, tenemos una expresión que puede sustituir a t, la cual es $t = x - y$. Desde luego que habrá que hacer una buena traducción del "lenguaje hablado" al lenguaje matemático para estar en posibilidades de plantear las ecuaciones correspondientes y las simbolizaciones anteriores nos ayudan. Sin embargo, lo que resulta para muchos más complicado es situar las expresiones en el tiempo. Hacer una tabla, como si se tratara de una "línea del tiempo" nos ayudará mucho.

	Hace t años	Actualmente	Dentro de t años
Edad del tío	$x - t$	x	$x + t$
Edad del sobrino	$y - t$	y	$y + t$

Para extraer de allí las expresiones que nos llevarán a las ecuaciones, conviene sustituir el valor de t por $x - y$ en el interior de la tabla y simplificar, así sólo quedarán dos incógnitas.

	Hace t años	Actualmente	Dentro de t años
Edad del tío	y	x	$2x + y$
Edad del sobrino	$2y - x$	y	x

Ahora será fácil establecer las ecuaciones.

Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora:

$$x = 3(2y - x)$$

Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, en ese momento, nuestras edades sumarán 63 años:

$$(2x + y) + x = 63$$

Después de quitar los simplificar y acomodar las ecuaciones, éstas quedarán:

$$4x - 6y = 0$$
$$3x + y = 63$$

Al resolver el sistema obtenemos $x = 27$ y $y = 18$. No olvides comprobar el resultado.

5. a) Sabemos que el sistema no tendrá solución (o quizá tendrá una infinidad de soluciones) si el determinante de los coeficientes es cero.

Así, , es decir, $3k - 4 = 0$, por tanto, $k = 4/3$.

¿Cómo sabemos que en efecto el sistema no tiene solución? Bastará ver que el determinante asociado a alguna de las incógnitas es diferente de cero (pues si los determinantes asociados a las incógnitas fueran también cero para todas ellas, entonces el sistema tendría una infinidad de soluciones). Así, vemos que , por tanto para $k = 4/3$ el sistema no tiene solución.

b) Para que la solución tenga abscisa -3, es decir que $x = -3$, es necesario que se cumplan simultáneamente las ecuaciones

$$3(-3) + 2y = 5$$
$$2(-3) + ky = 3$$

De la primera obtenemos $y = 7$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, ésta queda como $-6 + 7k = 3$. Al despejar se tiene que $k = 9/7$. Debes comprobar que este valor de k da como solución al sistema un valor de $x = -3$.

6. Las situaciones pueden ser las siguientes. NOTA: Cuando el plano está más oscuro, denota que los planos correspondientes a dos ecuaciones coinciden.

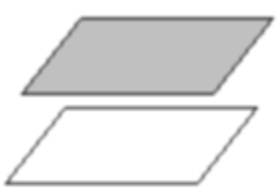


fig. *a*

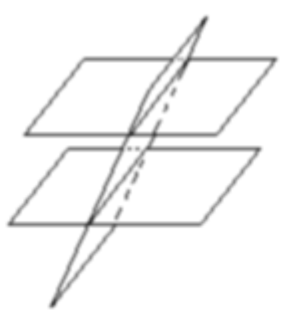


fig. *b*

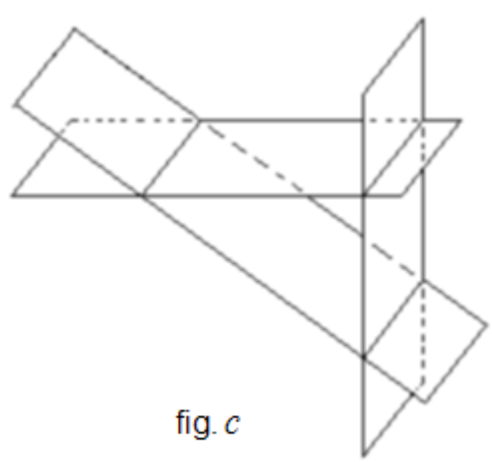


fig. *c*

$2z - 4 = 0$	$z - 2 = 0$	$z - 1 = 0$
$z - 2 = 0$	$z - 1 = 0$	$x - 2 = 0$
$z - 1 = 0$	$x - 2 = 0$	$x + z = 1$

7. Las vacas en el prado. Tal como está en el libro de Perelman

Problema

"Al estudiar las ciencias, los ejercicios son más útiles que las reglas",escribía Newton en su Aritmética Universal, y acompañaba las indicaciones teóricas con una serie de ejemplos. Entre ellos hallamos el de los toros que pastan en el prado, que generó un tipo específico de problemas semejantes a éste: "La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días, y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?".

Este problema sirvió de argumento para un cuento humorístico, que recuerda el Maestro particular de Chéjov. Dos adultos, familiares del escolar a quien habían encargado resolver este problema, se esforzaban inútilmente por hallar su solución y se asombraban: - ¡Qué extraño es el resultado! -dijo uno- . Si en 24 días 70 vacas se comen la hierba, entonces, ¿cuántas vacas se la comerán en 96 días? Claro que 1/4 de 70, es decir, 17 1/2 vacas... ¡Este es el primer absurdo! El segundo todavía más extraño, es que si 30 vacas se comen la hierba en 60 días, en 96 se la comerán 18 3/4 vacas. Además, si 70 vacas se comen la hierba en 24 días, 30 vacas emplean en ello 56 días, y no 60, como afirma el problema.

- ¿Pero tiene usted en cuenta que la hierba crece sin cesar? - preguntó otro.

La observación era razonable; la hierba crece incesantemente, circunstancia que no puede echarse en olvido, pues en ese caso no sólo no puede resolverse el problema, sino que sus mismas condiciones parecerán contradictorias.

¿Cómo debe resolverse pues, el problema?

Solución

Introduzcamos también aquí una segunda incógnita, que representará el crecimiento diario de la hierba, expresado en partes de las reservas de la misma en el prado. En una jornada hay un crecimiento de y; en 24 días será $24y$. Si tomamos todo el pasto como 1, entonces, en 24 días las vacas se comerán $1 + 24y$

En una jornada las 70 vacas comerán

$$(1 + 24y)/24$$

y una vaca (de las 70) comerá

$$(1 + 24y)/(24 * 70)$$

Siguiendo el mismo razonamiento: si 30 vacas acaban con toda la hierba del prado en 60 días, una vaca comerá en un día

$$1 + 60y/(30 * 60)$$

Pero la cantidad de hierba comida por una vaca en un solo día es igual para los dos rebaños. Por eso

$$(1 + 24y)/(24 * 70) = (1 + 60y)/(30 * 60)$$

de donde

$$y = 1/480$$

Cuando se halla y (medida de crecimiento) es ya fácil determinar qué parte de la reserva inicial se come una vaca al día

$$(1 + 24y)/(24 * 70) = (1 + 24/480)/(24 * 70) = 1/1600$$

Por último establecemos la ecuación para la solución definitiva del problema: si el número de vacas es x, entonces,

$$\{1 + (96/480)\}/96x = 1600$$

de donde $x = 20$

20 vacas se comerían toda la hierba en 96 días.