ELIMINATORIA, 26 de abril de 2011

PROBLEMAS

1.- Si usas un juego de imanes para armar prismas, compuesto de tubos para las aristas y esferas de acero para los vértices como se ve en la figura, pero sólo tienes 21 tubos y las esferas que necesites para unir dichas aristas y solamente quieres armar una figura, ¿cuántos prismas diferentes puedes armar si cada arista está constituida sólo con un tubo?

a) 5 b) 6 c) 7 d) Los que sean e) Ninguna de las anteriores

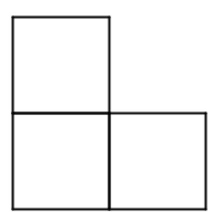
S1.-Si la base es un cuadrado, entonces para cada base se usan bolitas y 4 tubos; en general cada cara de un n-ágono usa n imanes y n tubos, además de otros n tubos para unir cada cara, por lo que en total el prisma usa **3n** tubos, pero $n>2$, pues no hay polígonos de 1 o 2 lados, además $3n<22$ pues solamente tenemos 21 tubos, por lo que $n<8$, entonces n puede ser 3, 4, 5, 6 ó 7. Por lo tanto la respuesta es 5. Opción (a).

2.- A Héctor le gustan **todas** las canciones que pasan por *Etsa FM,* y todas las canciones que le gustan a Héctor las pasan por *Majea* sólo que en *Majea FM* pasan la de “El Botecito” que a Héctor no le gusta ¿Cuál estación tiene más canciones?

a) *Etsa* b) *Majea* c) Tienen la misma cantidad d) No se puede saber e) Ninguna de las anteriores

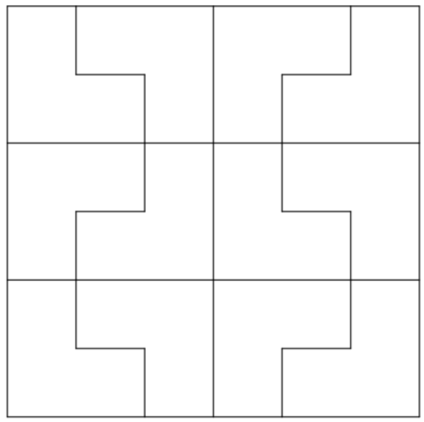
S2.- Llamemos H a la cantidad de canciones total que le gustan a Héctor, E a la cantidad de canciones que transmiten en Etsa y M a la cantidad de canciones que transmiten en Majea. El primer enunciado nos dice que $E<H+1$ y el segundo nos dice que $H<M$, por lo que $E<=H<M$, de aquí se sigue que $E<M$. Por lo que la respuesta Majea. Opción (b).

3.- La siguiente figura está formada por tres cuadrados. ¿Cuál es la mínima cantidad, de ese tipo de piezas, que necesitas para formar un cuadrado?

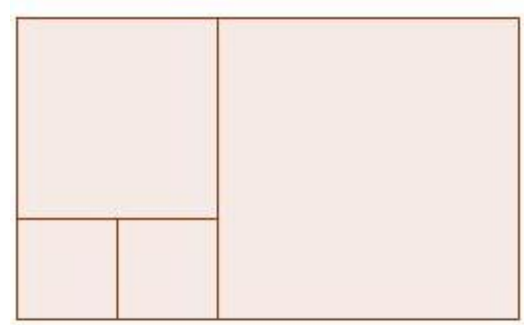


a) 9
b) 12
c) 18
d) 24
e) Ninguna de las anteriores

S3) Si se piensa que cada arista de la figura dada mide una unidad, el área del cuadrado formado por figuras como esa, tiene que ser múltiplo de 3. Se puede comprobar fácilmente que no se puede hacer un cuadrado de 3x3. Como el área de los cuadrados de 4x4 y 5x5 no son múltiplos de 3, la de 6x6 es la que se muestra en la siguiente figura, y se usan doce de ellas. Opción (b).



4.- Se tienen cuatro cuadrados acomodados como en la figura. Si la suma de los perímetros de los cuatro cuadrados es 28, ¿cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño?



a) 0.5
b) 1
c) 1.5
d) 2
e) Ninguna de las anteriores

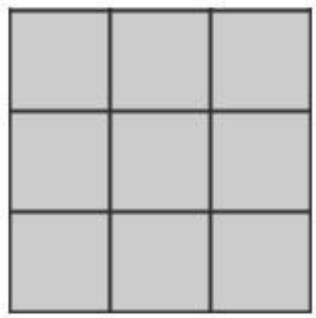
S4) Como son cuadrados, sus respectivos lados miden lo mismo. Los cuadrados pequeños comparten un lado, entonces sus lados lo mismo. El lado del cuadrado mediano es la suma de los cuadrados pequeños, entonces su lado es el doble de ese cuadrado. El lado del cuadrado grande es el del mediano más el del chico, es decir, tres veces el del chico. Por lo cual, los perímetros del mediano y del grande son 2 y 3 veces el del chico, respectivamente. Luego la suma de los perímetros es 7 veces el del chico. Entonces el perímetro del chico es 28/7=4, por lo tanto lado del chico es 1. Opción (b).

5.- Un número es coqueto si no tiene ceros y al multiplicarlo por 9 tiene la misma cantidad de cifras que al principio. ¿Cuántos números coquetos de 2011 cifras o menos hay?

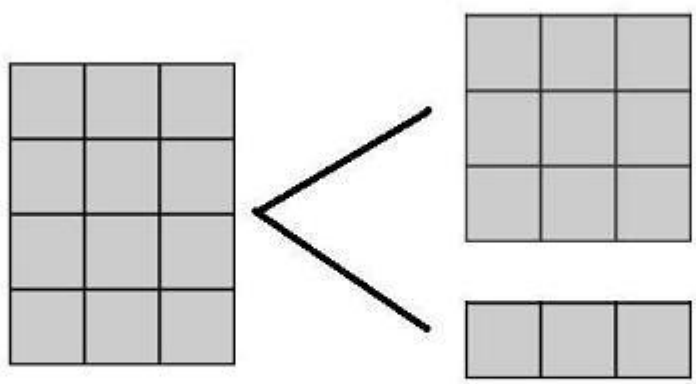
a) 0 b) 1024 c) 2011 d) Más de 1000000 e) Ninguna de las anteriores

S5) Si un número es coqueto, entonces cada una de sus cifras es al menos 1. Luego tomemos el más pequeño que se pueda, haciendo que todas sus cifras sean 1. Luego, 9 veces ese número es 9999...99 con la misma cantidad de cifras, que es el número más grande con esa cantidad de cifras, entonces ese número es el único.
Por lo tanto un número coqueto es de la forma 1111...1111, con lo cual concluimos que hay 2011 números con 2011 cifras o menos. Opción (c).

6.- Se tiene un chocolate de 3 X 3 como el de la figura, dividido en cuadritos de chocolate de tamaño 1 X 1.



Un corte de un chocolate consiste en romperlo por alguna parte, con tal de que lo rompamos por alguna de las líneas que marcan al chocolate.



Ejemplo de corte de un chocolate de 3X4 en uno de 3X1 y uno de 3X3.

Si queremos que al final nos queden los cuadritos de 1 X 1 completos (o sea no rotos) y separados, ¿cuál es la menor cantidad de cortes que debemos hacer?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Ninguna de las anteriores

S6) Cualquier elección del primer corte deja la misma configuración, una tableta de 1x3 y una de 2X3. La de 1x3 solamente se puede partir con dos cortes y no hay otra forma. La de 2x3 se puede partir en dos de 1x3 y acabar cada una con dos cortes, dando un total de ocho cortes. La otra forma de cortar la tableta de 2X3 es en una de 2x2 y una de 2x1, las cuales se pueden partir en tres y un cortes respectivamente, con lo que da también 8 cortes, entonces, de cualquier forma de cortarlo resultan ocho cortes, (en general una tableta de m x n se necesitan mn-1 cortes para cortar la tableta de chocolate). Opción (c).

7.- Si una naranja vale 4 plátanos, y 3 manzanas valen 2 naranjas, ¿cuántos plátanos valen 9 manzanas?

a) 12 b) 24 c) 36 d) 72 e) Ninguna de las anteriores

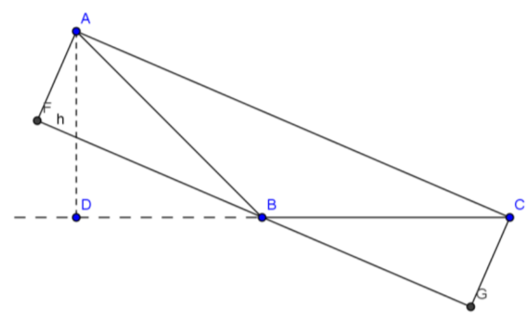
S7) Como una naranja es 4 plátanos, 2 naranjas son 8 plátanos, entonces 3 manzanas son 8 plátanos. Por lo tanto, 9 manzanas son 24 plátanos. Opción (b).

8.- Doce personas están en un círculo. Cada hombre está entre dos mujeres y cada mujer está entre un hombre y una mujer. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

a) 5 hombres y 7 mujeres b) 6 hombres y 6 mujeres c) 2 hombres y 10 mujeres d)) 4 hombres y 8 mujeres e) Ninguna de las anteriores

S8) Cada hombre está entre dos mujeres (MHM) y como esas mujeres ya tienen un hombre a su lado, la otra a su lado debe ser mujer (MMHMM). Luego, esas ya tienen una mujer a su lado por lo cual el otro debe ser hombre (HMMHMMH), es claro que de aquí llegamos a que deben estar sentados así: HMMHMMHMMHMM. Entonces hay 4 hombres y 8 mujeres. Opción (d).

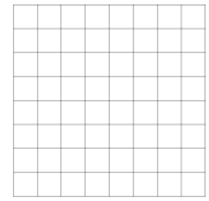
9.- En la figura que se muestra: la distancia del punto A al C, es tres veces la distancia del punto C al punto G. La distancia de B a C es de 50 cm. La distancia de A a C es de 90 cm. La recta que pasa por A y D es perpendicular a la recta que pasa por B, C y D. ¿Cuál es la distancia de A a D?



a) 27
b) 30
c) $3\sqrt{10}$
d) No se puede calcular
e) Ninguna de las anteriores

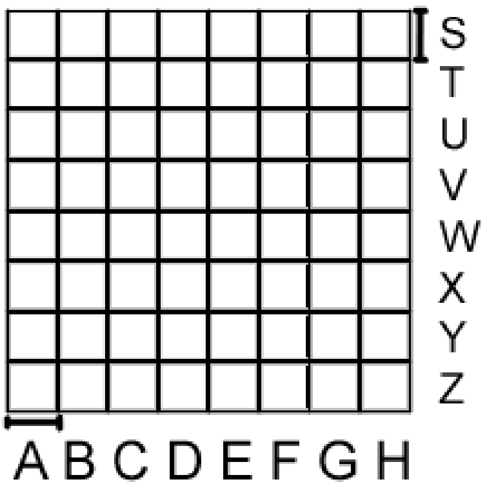
S9) Sabemos que AC mide 90 cm, por lo que CG debe medir su tercera parte, 30 cm. Obtenemos el área del triángulo ABC que mide ACxCG/2=90x30/2=BC*h/2 donde h es la distancia de A a D. De aquí tenemos 90x30=BCxh=50xh por lo que h=90x30/50=54cm. Opción (e)

10.- Si tienes una cuadrícula de ocho por ocho ¿Cuántos cuadrados diferentes *(de medidas diferentes)* podemos encontrar?



a) 65 b) 92 c) 204 d) 208 e) 2011

10.- Solamente se pueden encontrar cuadrados de las siguientes medidas 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 y 8x8. Para analizar mejor la cuadricula, nombraremos cada uno de los ocho segmentos de la base y cada uno de los ocho segmentos de la altura, de la siguiente forma:



En total hay 8x8=64 cuadrados de 1x1, ya que en la base tenemos ocho posibles lados que midan 1 ($\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}\ y\ \bar{H}$), y en la altura otros ocho lados que miden 1 ($\bar{S}, \bar{T}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{X}, \bar{Y}\ y\ \bar{Z}$).

Para los cuadrados que miden 2x2, encontramos siete posibles lados en la base, que miden 2 ($\overline{A+B}$, $\overline{B+C}$, $\overline{C+D}$, $\overline{D+E}$, $\overline{E+F}$, $\overline{F+G}$ y $\overline{G+H}$) y también encontramos siete posibles lados que miden 2 en la altura ($\overline{S+T}$, $\overline{T+U}$, $\overline{U+V}$,$\overline{V+W}$, $\overline{W+X}$, $\overline{X+Y}$ y $\overline{Y+Z}$), por lo tanto hay 7x7=49 cuadrados de la medida 2x2.

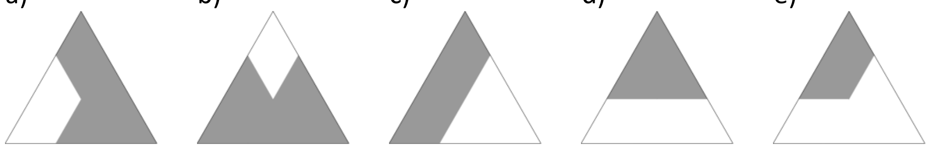
Con el mismo procedimiento, llegamos a la conclusión de que hay:

- 1x1= 1 cuadrado de 8x8.
- 2x2= 4 cuadrados de 7x7.
- 3x3= 9 cuadrados de 6x6.
- 4x4= 16 cuadrados de 5x5.
- 5x5= 25 cuadrados de 4x4.
- 6x6= 36 cuadrados de 3x3.
- 7x7= 49 cuadrados de 2x2.
- 8x8= 64 cuadrados de 1x1.

En total son 1+4+9+16+25+36+49+64= 204. Opción (A).

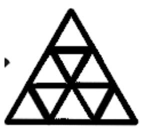
11.- Timmy está armando un rompecabezas en forma de triángulo equilátero, si ya armó la parte blanca que equivale a $\frac{16}{36}$, ¿Cuál de las figuras representa el rompecabezas?

a) b) c) d) e)



11) Al simplificar la fracción $\frac{16}{36}$ se obtiene $\frac{4}{9}$.

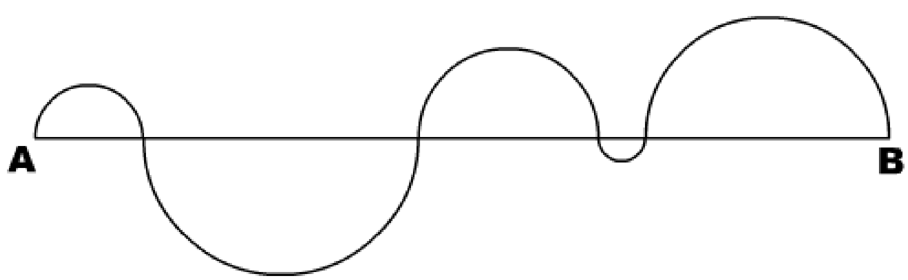
Podemos dividir el triángulo en nueve partes iguales como en de la siguiente manera:



Entonces, una representación de $\frac{4}{9}$ de la figura anterior es:

Opción (C).

12.- La siguiente figura está formada por semicírculos. El segmento AB, formado por los diámetros de estos semicírculos, mide 2011cm. ¿Cuánto mide el perímetro de la figura formada por semicírculos?



a) $\pi\left(\frac{2011}{2}\right)^2 + 2011$

b) $2011\pi + 4022$

c) $\frac{2011}{2}\pi + 2011$

d) $\pi\frac{2011^2}{2} + 2011$

e) $\frac{2011\pi+2011}{2}$

12.-La fórmula del perímetro del círculo: $Perímetro\ del\ círculo = diámetro * \pi = 2 * radio * \pi$

Pero no tenemos círculos, sino semicírculos, entonces el perímetro del semicírculo, será la mitad de la circunferencia, más el diámetro:

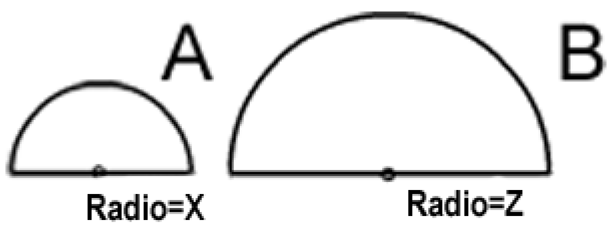
$$Perímetro\ del\ semicírculo = \frac{2 * radio * \pi}{2} + diámetro = radio * \pi + diámetro$$

Si sustituimos valores:

$$Perímetro\ de\ la\ figra = \left(\frac{2011}{2}\right)\pi + 2011$$

Dato curioso: En el caso de la figura mostrada, no importa la longitud de los cinco radios, ya que es lo mismo aplicar la fórmula del semicírculo a cada uno de los radios, que aplicar la fórmula del semicírculo a la suma de los radios.

Para demostrarlo, supongamos dos semicírculos A y B, de radio X y Z respectivamente.



Perímetro de A = $x * \pi + x * 2$

Perímetro de B = $z * \pi + z * 2$

Si sumamos los dos perímetros, obtenemos:

$$Perímetro\ total = x * \pi + x * 2 + z * \pi + z * 2$$

Acomodaremos los cuatro términos:

$$Perímetro\ total = \pi * x + \pi * z + 2 * x + 2 * z$$

Ahora es más visible que podemos factorizar en π y en 2:

$$Perímetro\ total = \pi(x + z) + 2(x + z)$$

Y si volvemos a acomodar, encontramos una expresión idéntica a la fórmula del semicírculo:

$$Perímetro\ total = (x + z) * \pi + 2(x + z) = radio * \pi + diámetro$$

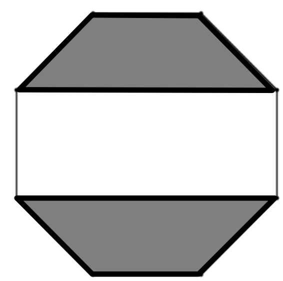
Opción (c).

13.- El promedio de 5 números es 5. El promedio de 3 de ellos es 3. ¿Cuál es el promedio de los otros dos?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) Ninguna de las anteriores

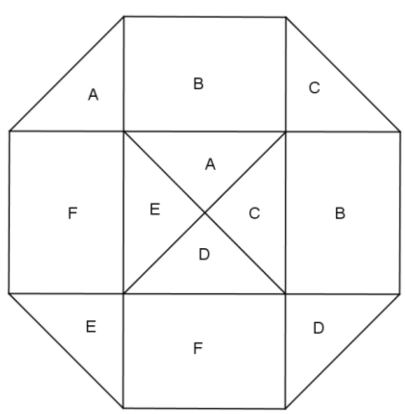
13) Como el promedio de los 5 números es 5, entonces su suma es 25. Como el promedio de 3 de ellos es 3, entonces su suma es 9. Luego, la suma de los otros dos debe ser 25-9=16. Entonces su promedio es 16/2=8. Opción (b).

14.- La siguiente figura es un octágono regular, ¿cuál es el resultado de dividir el área sombreada entre el área NO sombreada?



a) $2/3$
b) 1
c) $1+\sqrt{2}$
d) Faltan datos
e) Ninguna de las anteriores

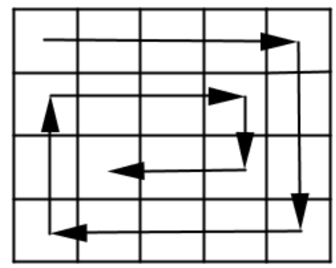
14) Se puede hacer una división del octágono como se muestra en la siguiente figura, observándose que el área es la misma para las regiones pedidas, por lo cual el resultado de la división es 1.



Opción (b).

15.- Estás en la esquina superior izquierda de una cuadrícula rectangular y mirando hacia la derecha, empiezas a caminar hacia el frente. Si llegas al final de la cuadrícula o si el siguiente cuadro que está frente a ti ya lo visitaste, giras a la derecha. Debes detenerte cuando todos los cuadrados ya han sido visitados. Por ejemplo, si la cuadrícula tuviera 4 renglones y cinco columnas, terminarías en el renglón 3 y en la columna 2, la suma del renglón y la columna es 3+2=5 (ver la figura). Si la cuadrícula fuera de 2011 renglones por 25 columnas, ¿cuál es la suma del renglón y la columna de donde terminas?

a) 1011
b) 1018
c) 2012
d) 2021
e) Ninguna de las anteriores



15) Cada vez que se da una vuelta, la siguiente vuelta empieza en el renglón k, columna k. Después de la vuelta 12, sólo queda sin visitar una columna vertical (los casillas que van del renglón 13 columna 13, hasta el renglón 2011-12=1999 columna 13). Por lo tanto la última casilla que se visita es la que está renglón 1999 columna 13, entonces la respuesta es 1999+13=2012.