Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS aguascalientes 2005

EXAMEN FINAL

10 de septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES

a) Deberás contestar la prueba exclusivamente en las hojas blancas que se te han proporcionado. En ninguna de las hojas que entregues deberás escribir tu nombre.

b) Utiliza una hoja (o tantas como sean necesarias) para resolver cada problema y anota en la parte superior derecha de ella (o ellas) el número del problema que estás contestando, no necesitas volver a escribir el enunciado.

c) No utilices una misma hoja para resolver dos o más problemas distintos.

d) Anota en la parte superior izquierda de todas las hojas el número de lista que se te asignó.

e) Si tienes alguna duda sobre los enunciados de los problemas podrás hacer preguntas, solamente por escrito, en las tarjetas que se te dan para ello, y sólo sobre los enunciados. En dichas tarjetas sí deberás anotar tu nombre y también tu número de lista. La respuesta se te dará también por escrito.

f) En caso de que algún problema sea irresoluble (no tenga solución) deberás dar una justificación de ello.

g) Para asignar calificación, se tomará en cuenta la manera en la que abordas y desarrollas los problemas, por ello es muy importante que entregues todas las hojas que consideres necesarias (incluso si no logras terminar la solución).

h) No está permitido el uso de calculadoras o tablas, aunque sí puedes emplear instrumentos geométricos (escuadras, regla y compás).

i) Dispones de 4 horas para resolver el examen. El comité organizador te desea mucha suerte.

j) Los resultados se publicarán en la página electrónica http://www.ommags.com y en el periódico *El Sol del Centro* el lunes 12 de septiembre.

EXAMEN FINAL

10 de septiembre

Problema 1

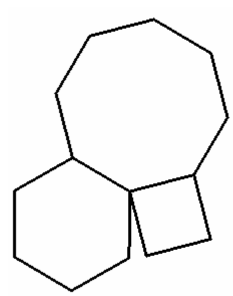
El número **N** de la 19ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, es el **menor** número que cumple las siguientes características:

a) Consta de diez cifras, todas diferentes.

b) Si el número es **N**=**abcdefghij** entonces, los números **ab**, **bc**, **cd**, **de** y **efg** son múltiplos de 19, y

c) **h+i+j** es un divisor de 2005.

Encuentra el valor de **N**



Problema 2

12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octágonos regulares son usados para formar un poliedro (convexo), llamado P, de modo que en cada uno de sus vértices se encuentren un cuadrado, un hexágono y un octágono. Entendiendo diagonales interiores por los segmentos de recta que unen los vértices de caras distintas de P, ¿cuántas diagonales interiores tiene P?

Problema 3

El número 3^{11} se puede expresar como la suma de k enteros positivos consecutivos. Encuentra el valor mayor posible que puede tomar k.

Problema 4

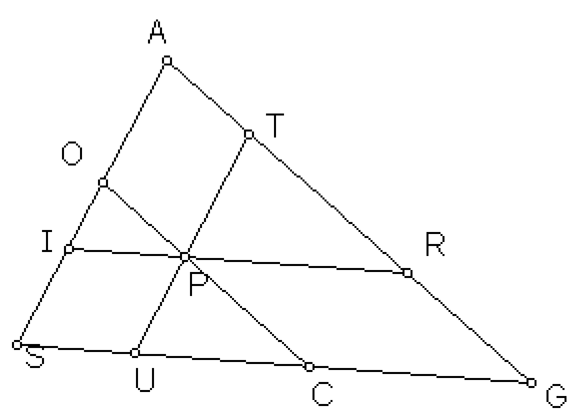
En el interior del triángulo AGS, se toma un punto P tal que los segmentos TU, RI y CO:

(a) pasan por P,

(b) tienen longitud d, y

(c) son paralelos a los lados del triángulo; es decir, TU es paralelo a SA, RI a SG y CO a AG.

Sabiendo que AG=s, GS=a y AS=g, encuentra el valor de d.



EXAMEN FINAL
SOLUCIONES
10 de septiembre

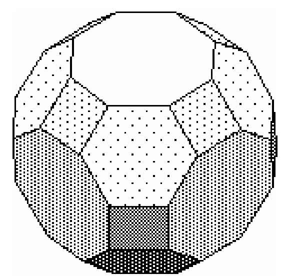
Solución al Problema 1

Los números **ab**, **bc**, **cd**, y **de** son múltiplos de 19 de dos cifras, que tienen la característica de que la cifra de las unidades del primero debe ser la cifra de las unidades del segundo, la cifra de las unidades del segundo debe ser la cifra de las decenas del tercero y la cifra de las unidades del tercero debe ser la de las decenas del cuarto.

Los únicos múltiplos de 19 de dos cifras son el 19, 38, 57, 76 y 95.

Como queremos el menor número **N**, tomaremos como **ab** al 19, entonces, **bc** debe ser 95, **cd** el 57 y **de** 75, (de hecho, es la única forma de escoger los números para que satisfagan la propiedad del primer párrafo).

Las cifras restantes son 0, 2, 3, 4 y 8, tres de ellas deben sumar un divisor de 2005, como los divisores del 2005 son 1, 5, 401 y 2005, la única posibilidad es que las tres últimas cifras sumen cinco y éstas sean los números 0, 2 y 3, y en ese orden ya que N debe ser el menor.



Sólo falta acomodar al 4 y al 8, como efg es múltiplo de 19 y e=6, el único número con la cifra de las centenas 6 que involucra al 4 y 8, que sea múltiplo de 19 es el 684.

Por lo tanto el número de la Olimpiada es 1957684023.

Solución al Problema 2

Llamemos V, A, D e I, a la cantidad de vértices, aristas, diagonales faciales y diagonales interiores respectivamente. Demostraremos que **I**=840.

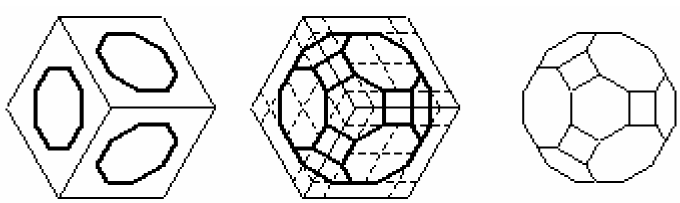
Como P es convexo, **I**=(total de segmentos que unen dos vértices de P) - A - D.

V = 8 x (la cantidad de octágonos) = 8 x 6 = 48. Lo anterior se debe a que en cada vértice concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octágono.

A = 1/2 x 3V = 72, ya que a cada vértice concurren 3 aristas, y, en 3V hemos contado dos veces cada arista.

D=12x2+8x9+6x20=216, ya que el cuadrado, el hexágono y el octágono tienen 2, 9 y 20 diagonales respectivamente.

Finalmente, el número buscado es: I = $\frac{v(v-1)}{2}$ - A - D = 1128 - 72 - 216 = 840.



P es uno de los 13 poliedros arquimedianos conocido como cuboctaedro rombo truncado.

Solución al Problema 3

Vamos a demostrar que 3^{11}=122+123+...+607.

Supongamos que n+1 es el primero de los sumandos. Entonces:

[*] 3^{11}=(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(n+k)=nk+(1+2+3+...+k)=nk+$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(2n+k+1)}{2}$

Sea p=2n+k+1, así, $2\cdot 3^{11}=kp\geq k\cdot k=k^2$, entonces $k\leq\sqrt{2\cdot 3^{11}}=3^5\sqrt{6}$, y como k es un entero divisor de $2\cdot 3^{11}$, concluimos que $k\leq 2\cdot 3^5$.

Falta verificar que si k=$2\cdot 3^5$ existe un natural n que satisface [*].

$$3^{11}=\frac{(2\cdot 3^5)(2n+2\cdot 3^5+1)}{2} \iff 3^6=2n+2\cdot 3^5+1 \iff 729=2n+487 \iff n=121$$

Por lo tanto, el valor mayor posible que puede tomar k es $2\cdot 3^5$

Solución al Problema 4

Notemos que ATPO, RGCP y PUSI son paralelogramos, y por lo tanto, GR=CP, TA=PO, etc.

Así obtenemos que TR=AG-(GR+TA)=AG-(CP+PO)=s-d. De la misma manera, IO=g-d y UC=a-d.

Luego, por el criterio AAA, los triángulos IPO y PTR son semejantes a AGS, así que $\frac{IP}{IO}=\frac{GS}{AS}$ y $\frac{PR}{TR}=\frac{GS}{AG}$, de lo cual concluimos: $IP=IO\frac{GS}{AS}=(g-d)\frac{a}{g}$ y $PR=TR\frac{GS}{AG}=(s-d)\frac{a}{s}$.

El resultado se obtiene al sumar las dos ecuaciones obtenidas:

$$IP+PR=d=(g-d)\frac{a}{g}+(s-d)\frac{a}{s}=\frac{a(g-d)s+a(s-d)g}{gs}$$

$$\iff dgs=asg-asd+asg-adg \iff d=\frac{2asg}{ag+as+gs}$$