Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS aguascalientes 2005

ELIMINATORIA

Problema 1 ¿Cuál es la suma de los dígitos del número que se obtiene en 5^{2005} x 2^{2002}?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 13 (E) Más de 13

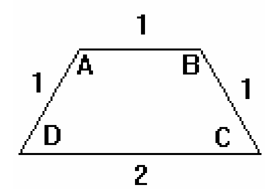
Problema 2 ¿Cuál es la mitad de 4^{2004}?

(A) 2^{2004} (B) 4^{2004} (C) 4^{1002} (D) 2^{4007} (E) 2^{1002}

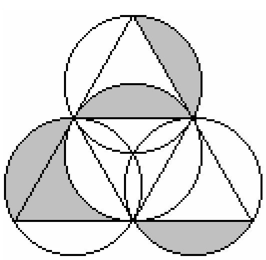
Problema 3 La mamá de Miguel, Julio y Toño, les reparte 4 paletas, ¿de cuántas formas se las puede repartir? (Puede ser que a alguno no le toque paleta.)

(A) 4 (B)12 (C) 15 (D) 21 (E) 30

Problema 4 El trapecio isósceles de la figura de la derecha es tal que AB es paralelo a DC y AD=AB=BC=1 y DC=2. ¿Cuánto mide el ángulo CAD?



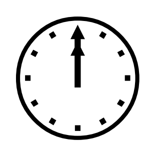
(A) 30º (B) 45º (C) 60º (D) 90º (E) 120º



Problema 5 En la figura de la izquierda hay 4 triángulos equiláteros del mismo tamaño con una circunferencia sobre sus 3 vértices. El radio de los círculos es 2. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

(A) π (B) 2π (C) 4π (D) 8π (E) π^2

Problema 6 Un reloj muy descompuesto se adelanta una hora cada media hora. ¿Cuál es el número máximo de veces que este reloj da la hora correcta en un día?



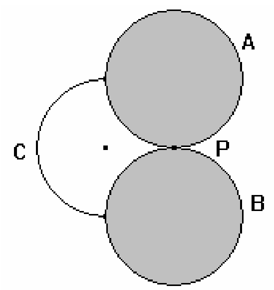
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6.

Problema 7 Si un cubo se pinta de azul y éste se divide en 1000 cubitos. ¿Cuántos cubitos tendrán exactamente dos caras azules?

(A) 64 (B) 80 (C) 96 (D) 100 (E) 120

Problema 8 Un cubo tiene un volumen de 2 litros. Se construye otro cubo cuya arista (el lado) es el doble que la del primer cubo. ¿Cuál es el volumen de este nuevo cubo?

(A) 2 litros (B) 4 litros (C) 8 litros (D) 16 litros (E) Ninguno de los anteriores



Problema 9 En la figura de la izquierda, las circunferencias A y B se tocan solamente en el punto P el cual está en la circunferencia C, además si unimos los centros de las circunferencias A y B mediante una recta, esta recta sólo tocará a la circunferencia C en P. Si los radios de las tres circunferencias miden 2005, ¿cuál es el área de la parte **NO** sombreada?

(A) $\frac{3}{4}\pi 2005^2$ (B) $\frac{2005^2}{2}$ (C) $\frac{\pi 2005^2}{2}+\frac{2005^2}{4}$

(D) $\pi 2005^2-\frac{2005^2}{4}$ (E) Ninguna de las anteriores.

Problema 10 ¿Cuántos rectángulos (incluidos los cuadrados) cuyos lados tengan valores enteros y un área igual a 2005 existen? (No se cuentan los giros ni reflexiones del rectángulo.)

(A) 1 (B) 2 (C) 401 (D) 2005 (E) Ninguno

Problema 11 A un cubo, se le cortan las esquinas mediante planos que pasan por los puntos medios. En la figura se muestra cómo se ve éste cuando le quitamos dos de ellas.

Si le quitamos TODAS las esquinas queda un poliedro que tiene:

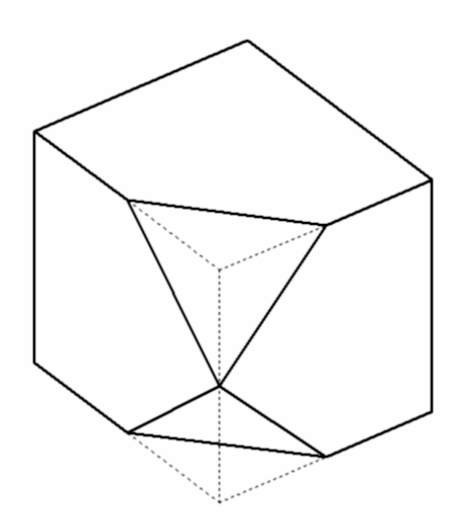
(A) 14 caras y 24 aristas.

(B) 6 caras triangulares y 8 cuadradas.

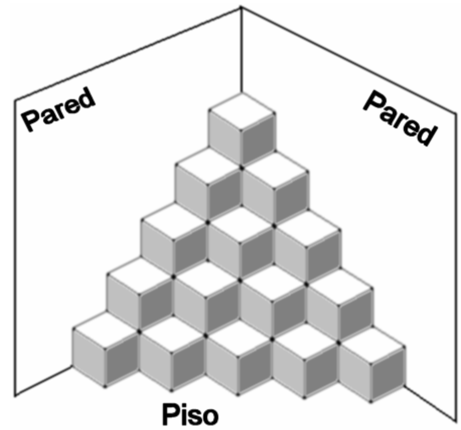
(C) La mitad del volumen que el cubo original.

(D) Mayor superficie que el cubo original.

(E) Más vértices que aristas.



Problema 12 En la esquina de una habitación, con paredes planas, perpendiculares entre sí y al piso, que también es plano, se mira una estructura como la de la figura que, se asegura (y les creeremos), está hecha con cubos del mismo tamaño. A partir lo anterior, y de esta vista, se puede afirmar que la cantidad de cubos de la estructura construida es:



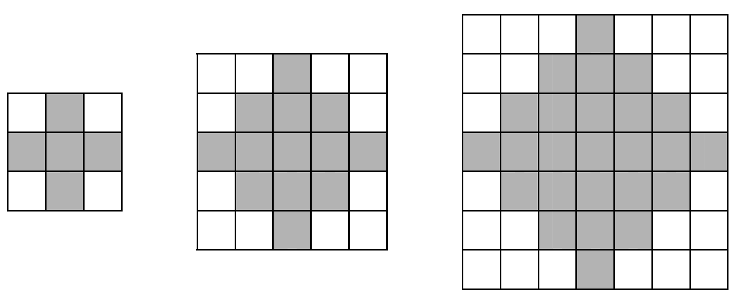
(A) Menos de 40, pero más de 35.
(B) De 15 a 35.
(C) Exactamente 15.
(D) Exactamente 35.
(E) Ninguna de las anteriores.

Problema 13 Se le llama *Cuadrado Mágico* a una cuadrícula de **n**x**n**, en la que se acomodan números consecutivos (del 1 al n^2) cumpliendo con que la suma de cualquier renglón y de cada columna siempre es la misma. Por ejemplo, en un Cuadrado Mágico de 3 x 3, ver la figura anexa, la suma debe de ser igual a 15 ¿Cuánto debe ser la suma de cada renglón en un Cuadrado Mágico de 5 x 5?

4	9	2
8	1	6
3	5	7

(A) 25 (B) 35 (C) 45 (D) 55 (E) 65

Problema 14 Las primera figura que se muestra es una cruz de ancho 3, la segunda es una cruz de ancho 5 y la tercera de ancho 7, ¿cuál será el área de una cruz similar de ancho 2005?



(A) 2x1002x1003 (B) 2005x2005 - 2x1002x1003 (C) 2005x2005/2
(D) 2004x2004/2 (E) 2005x2005 - 2x1002x1002

Problema 15 En la sucesión **2005, 2004, 2004, 2003, 2003, 2003,…,** el término *uno* es 2005, los término *dos* y *tres* son 2004, y los términos *cuatro*, *cinco* y *seis* son 2003, ¿cuál es el término que está en el lugar *2005*?

(A) 1940 (B) 1942 (C) 1943 (D) 1950 (E) Ninguna de las anteriores.

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

19 Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS aguascalientes 2005

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

ELIMINATORIA
RESPUESTAS

NOMBRE ____

ESCUELA ____

NIVEL (SEC o BACH) ________________________ GRADO (AÑO o SEM.) _________

1	A	B	**C**	D	E
2	A	B	C	**D**	E
3	A	B	**C**	D	E
4	A	B	C	**D**	E
5	A	B	**C**	D	E
6	A	B	C	**D**	E
7	A	B	**C**	D	E
8	A	B	C	**D**	E
9	A	**B**	C	D	E
10	A	**B**	C	D	E
11	**A**	B	C	D	E
12	A	**B**	C	D	E
13	A	B	C	D	**E**
14	A	**B**	C	D	E
15	A	B	**C**	D	E

ELIMINATORIA

SOLUCIONES

Problema 1. (C) $5^{2005}\ 2^{2002} = 5^{3}\ 5^{2002}\ 2^{2002} = 5^{3}\ 10^{2002} = 125\ 10^{2002} = 125\ 00\ldots0$ (2002 ceros), por lo cual la suma de sus dígitos es 8.

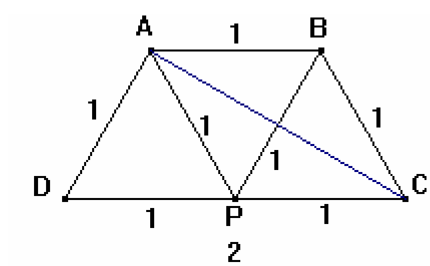
Problema 2. (D) $\frac{4^{2004}}{2} = \frac{\left(2^{2}\right)^{2004}}{2} = \frac{2^{4008}}{2} = 2^{4007}$

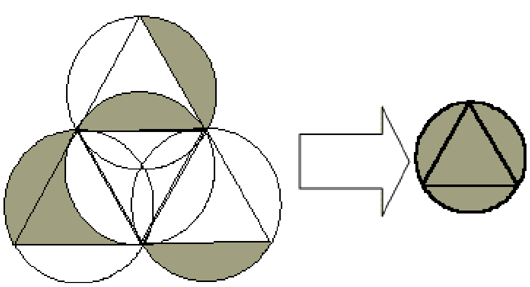
Problema 3. Hagamos una tabla para ver todas las posibles opciones de la repartición.

Miguel	4	0	0	3	3	0	1	1	0	2	2	0	2	1	1
Julio	0	4	0	1	0	3	3	0	1	2	0	2	1	2	1
Toño	0	0	4	0	1	1	0	3	3	0	2	2	1	1	2

En total hay 15 posibilidades de la repartición.

Problema 4. (D) Sea P el punto medio del segmento CD. Tracemos los segmentos de AP y BP, se observa que se forman tres triángulos equiláteros, ADP, ABP y BCP. Entonces el ángulo <DAP=60º por ser un ángulo de un triángulo equilátero. Tracemos el segmento AC, que es la bisectriz del ángulo <PAB, por lo cual <PAC=30º. Concluimos <CAD=<DAP+<PAC=60º+30º=90º





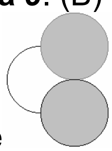
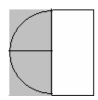
Problema 5. (C) El área sombreada forma un círculo por lo cual Área=$\pi r^{2}=\pi(2)^{2}=4\pi$

Problema 6. (D) Si cada media hora el reloj se adelanta una hora, entonces cada hora tenemos un adelanto de dos horas. Así, cada 6 horas tenemos un adelanto de 12 horas. Sin embargo, adelantar las manecillas 12 horas las deja en donde estaban, de modo que no altera la hora. Concluimos que cada 6 horas no hay adelanto en el reloj, y por lo tanto, este reloj descompuesto puede dar la hora correcta hasta 4 veces al día.

Problema 7. (C) Como el cubo se dividió en 1000 cubitos, tenemos que cada lado del cubo debe tener 10 cubitos. Los cubitos que están coloreados con dos colores son solamente los que forman las aristas del cubo, a excepción de los cubitos de las esquinas que están coloreados con tres colores. Por lo cual habrá 8 cubitos pintados con solamente dos caras por cada arista, como en total hay 12 aristas, tenemos que cubitos con dos colores hay 8x12=96.

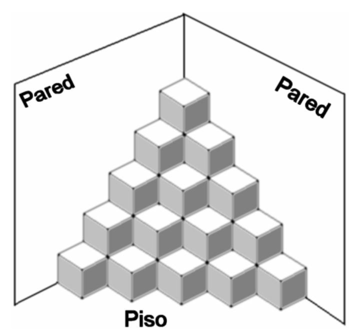
Problema 8 (D) Llamemos L al lado del cubo original. Entonces $L^3 = 2$, si se duplica cada lado, tenemos que el nuevo volumen es: $(2L)^3 = 8L^3 = 8x2 = 16$.

Problema 9. (B) Por simplicidad se pondrá ARNS en lugar de Área de la región no sombreada.

ARNS de  = ARNS de  = ARNS de  = Mitad del área del cuadrado= $\dfrac{2005^2}{2}$

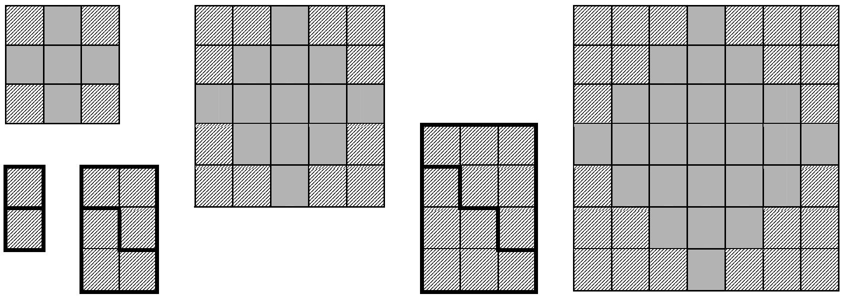
Problema 10. (B) Las únicas parejas de enteros cuyo producto es 2005 son 1x2005 y 5x401, por lo cual solamente hay dos rectángulos de longitud entera y área 2005.

Problema 11 (A) Por cada una de las caras del cubo sigue habiendo una cara (cuadrada) de la nueva figura, 6 en total, y en cada vértice del cubo se forma una nueva cara (triangular), 8 en total, por lo tanto tendrá en total **14 caras**. En las caras superior e inferior habrá 4 aristas, 8 en total, y en las laterales 4 por cada cara lateral del cubo, 4x4=16 en total; así, la nueva figura tendrá **24 aristas**.



Problema 12. (B) Puede ocurrir que sólo haya los cubos que se ven, que son 15, pero atrás podría haber más. La máxima cantidad que podría haber es si toda la parte trasera también estuviera llena, en cuyo caso: en el 1er. nivel superior hay un cubo; en el segundo un cubo acomodado en la arista, como el del nivel superior, más los 2 que se ven; en el tercero la cantidad de cubos que habría del nivel superior, más tres; y así sucesivamente. Por lo tanto como máximo habría: 1+3+6+10+15=35. Así, hay de 15 a 35.

Problema 13. (D) $\dfrac{1+2+3+...+25}{5} = \dfrac{325}{5} = 65$



Problema 14. (B) Con dos partes de las regiones “rayadas” podemos formar dos rectángulos; en la primera figura cada rectángulo es de 1x2, en la segunda son de 2x3 y en la tercera de 3x4. Procediendo de esta forma, en una cruz de ancho 2005, podemos hacer dos rectángulos de 1002x1003, por lo que el área sombreada será la del cuadrado menos la de los dos rectángulos: 2005x2005 - 2x1002x1003=2010013.

Problema 15: (C) Primero debemos encontrar un número n que cumpla que 1+2+3+…+n sea menor que 2005 pero lo más cercano a 2005: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}<2005$ entonces necesitamos el mayor número n que cumpla $n^2+n-4010<0$, dicho número es el 62, entonces el término 2005 de la sucesión será: 2005 – 62 = 1943.