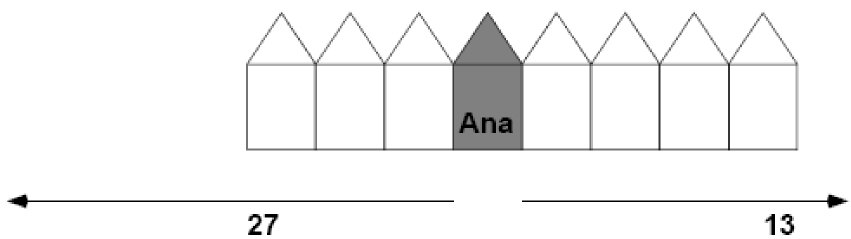
ELIMINATORIA, 28 de marzo de 2009

PROBLEMAS

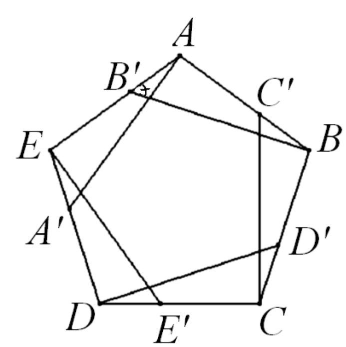
1. Ana y Pedro viven en la misma calle (sobre la misma banqueta). De un lado de la casa de Ana hay 27 casas y del otro hay 13 casas. Pedro vive en la casa que está justo en medio de la calle.



¿Cuántas casas hay entre la casa de Ana y la de Pedro (sin contar la de Ana y la de Pedro)?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 14 e) 21

2. En la siguiente figura $ABCDE$ es un pentágono regular.



AA' es perpendicular a AB;
BB' es perpendicular a BC;
CC' es perpendicular a CD;
DD' es perpendicular a DE,
y EE' es perpendicular a EA.

¿Cuántos grados mide el ángulo $BB'A$?

a) 30^o b) 45^o c) 54^o d) 72^o e) Ninguna de las anteriores

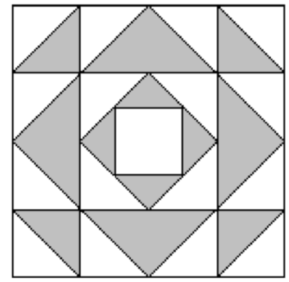
3. A las 6:15 un fantasma apareció y el reloj loco, que estaba mostrando la hora correcta, empezó a caminar a la velocidad correcta pero en sentido contrario. El fantasma desapareció a las 19:30 (hora real). ¿Qué hora marcaba el reloj loco en ese momento?

a) 17:00 b) 17:45 c) 18:30 d) 19:00 e) 19:15

4. Tengo unas canicas azules, otras rojas y otras verdes. Si 6 de ellas son verdes, una octava parte del total son azules y el número de rojas es 5 veces el de azules, ¿cuántas canicas tengo?

a) 16 b) 20 c) 24 d) 32 e) 40

5. Cuántos centímetros cuadrados tiene el área de la región sombreada, suponiendo que el área del cuadrado más grande es de 16 cm^2:



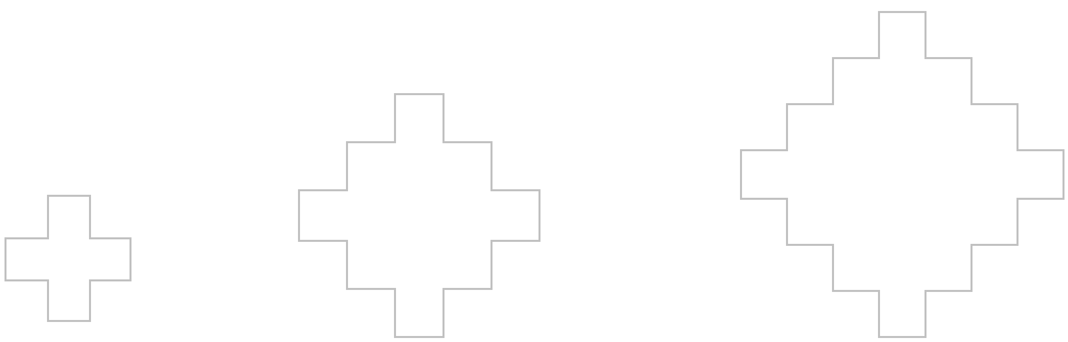
a) 5.5 b) 6 c) 6.5 d) 7 e) 7.5

6. ¿Cuál es la suma de las tres cifras faltantes en la multiplicación, las cuales están marcadas con un asterisco (*), y podrían ser diferentes:

$$\begin{array}{r} * \; * \\ \times \quad 7 \\ \hline 4 \; * \; 9 \end{array}$$

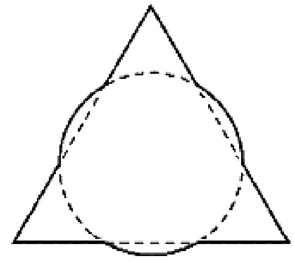
a) 15 b) 19 c) 23 d) No tiene solución e) Tiene varias soluciones

7. A la primera figura le llamaremos *cruz 1* a la segunda *cruz 2* y a la tercera *cruz 3*, y así sucesivamente. Las figuras están formadas con segmentos rectilíneos de igual longitud. ¿Cuál será el perímetro de la *cruz 2009*, si la longitud de cada segmento rectilíneo es de una unidad?



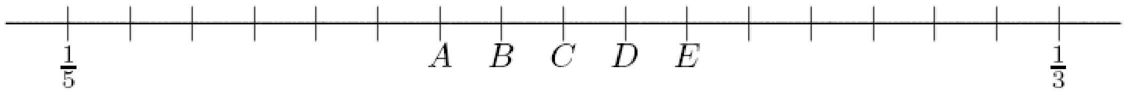
a) 16068 b) 16070 c) 16072 d) 16074 e) 16076

8. En la figura se muestra un triángulo equilátero de lado 3 *cm* y sobrepuesto hay un círculo de radio 1 *cm*, de tal manera que el centro del círculo coincide con el centro del triángulo. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de la figura formada por el contorno (marcada con línea continua en la figura)?



a) $3 + 2\pi$ b) $6+ \pi$ c) $9 + \pi/3$ d) 3π e) $9 + \pi$

9. Las fracciones 1/3 y 1/5 están señaladas en la recta numérica y el segmento que las une se ha dividido en 16 partes iguales. ¿En qué posición se encuentra 1/4 ?



a) A b) B c) C d) D e) E

10. Doce naranjas y una sandía cuestan lo mismo que dos sandías y tres peras, y tres sandías cuestan lo mismo que siete peras. ¿A cuántas naranjas equivalen veinte peras?

a) 9 b) 15 c) 20 d) 30 e) 45

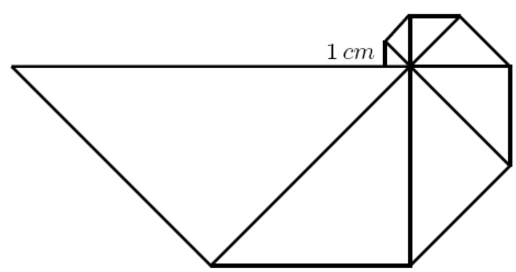
11. En una extraña tribu la moneda es el osep, y existen monedas de 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 oseps. Nauj y Ocram son dos niños locales que encontraron una cajita con una moneda de cada valor. ¿De cuántas formas pueden repartirse todas las monedas de manera que cada uno tenga el mismo dinero?

a) 0 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

12. Si la suma de las cifras de un número es 2009, ¿cuál es la cantidad mínima de cifras que debe tener?

a) 223 b) 224 c) 2009 d) 2010 e) Ninguna de las anteriores

13. Se empieza con un triángulo rectángulo isósceles con catetos de un centímetro. Sobre la hipotenusa se construye un nuevo triángulo rectángulo isósceles, como en la figura. Se repite esto muchas veces hasta formar el caracol. Calcula el área del caracol.



a) 64 cm^2 b) 104.5 cm^2 c) 127.5 cm^2 d) 210.5 cm^2 e) 255 cm^2

14. Cada semana el precio de un videojuego disminuye el 20% respecto a lo que costaba la semana anterior. Hoy cuesta $400 pesos y Pedro sólo tiene ahorrados $200, y no puede ahorrar más. ¿Cuántas semanas tendrá que esperar para poder comprar el videojuego?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) nunca va a poder

15. Un número de 8036 cifras, se forma “juntando” 2009 veces el número 2009 $\left(\underbrace{20092009\ldots2009}_{2009\ \textit{veces el}\ 2009}\right)$. ¿Cuál es el menor número, mayor a 1, que es divisor de él, es decir, que al dividirlo entre él deja residuo cero?

a) 3 b) 7 c) 11 d) 41 e) 2009

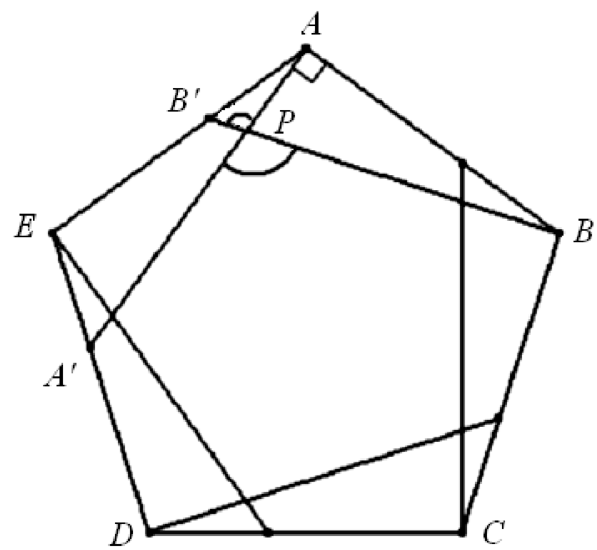
ELIMINATORIA, 28 de marzo de 2009
SOLUCIONES

1. (a) En total son 27 + 1 + 13 = 41 casas y Pedro vive en la casa que está en la posición 21 de izquierda a derecha. Como Ana está en la posición 28, entre las dos casas hay 6 casas.

2. (c) Llamemos P al punto de intersección del segmento AA' con BB'.

Por ser $AB'P$ un triángulo, sus ángulos interiores suman 180^o, esto es: $\angle PB'A + \angle B'AP + \angle APB' = 180^o$.

Notemos que en el interior del pentágono regular $ABCDE$ se forma otro polígono regular, donde uno de los vértices es P. Cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados se pueden calcular mediante la fórmula $\dfrac{180^o(n-2)}{n}$, la cual es fácil de deducir, para un pentágono regular tendríamos $\dfrac{180^o(5-2)}{5} = 108^o$. De aquí que $\angle B'AB = \angle A'PB = 108^o$. También, por ser ángulos opuestos, $\angle A'PB = \angle APB' = 108^o$.



Como AA' es perpendicular AB y $\angle A'AB = \angle PAB = 90^o$, entonces $108^o = \angle B'AB = \angle B'AP + \angle PAB = \angle B'AP + 90^o$; de aquí, al despejar, se obtiene que $\angle B'AP = 108^o - 90^o = 18^o$.

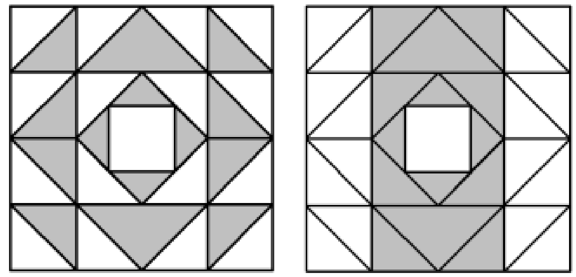
Entonces $180^o = \angle PB'A + \angle B'AP + \angle APB' = \angle PB'A + 18^o + 108^o$, por lo tanto $\angle PB'A = 180^o - 18^o - 108^o = 54^o$.

3. (a) Entre las 19:30 y las 6:15 hay 13:15 horas. Doce horas después el reloj marcaría las 18:15; a esta cantidad todavía hay que restarle 1:15 horas.

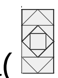
4. (c) Como hay 5 veces más rojas que azules, y las azules son 1/8 del total, las rojas son 5/8 del total. Entonces las 6 canicas verdes corresponden a 2/8 = 1/4 del total. Tengo 24 canicas.

5. (d) Como el área del cuadrado más grande es 16 *cm*^{2}, cada uno de sus lados es 4 *cm*.

Primero dividamos en dos partes iguales los triángulos laterales que se encuentran en la parte media, tal como se ve en la siguiente figura.



Se ve que todos triángulos sombreados de la parte lateral, son congruentes a los triángulos no sombreados de la parte central vertical, por lo cual, el área buscada es igual al área sombreada de la figura de la extrema derecha.

Así, el área buscada se puede calcular como Área()-Área()= $2\times 4-1\times 1=7$

6. (b) Asignemos a cada asterisco una letra (A, B y C) para su más fácil manejo. Notemos que A, B y C solamente pueden tomar uno de los siguientes valores: 0, 1, 2, 3, … 8 ó 9.

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & C & 9 \end{array}.$$

La cifra de las unidades de $B\times 7$ debe terminar en 9, la única una cifra B que cumple con esto es el es el mismo 7, por lo cual B = 7:

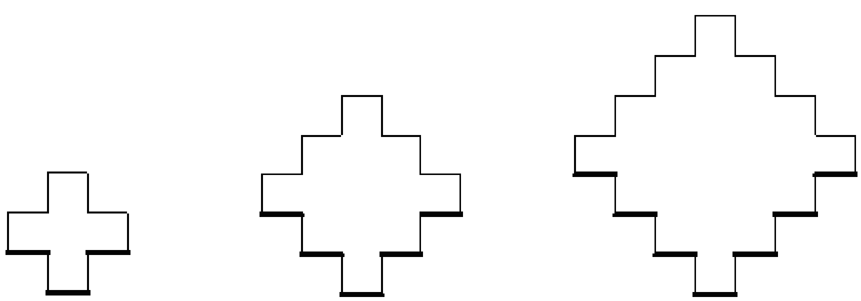
$$\begin{array}{ccc} & A & 7 \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & C & 9 \end{array}$$

Para calcular A y C observemos que $40 \leq 7\times A+4 < 50$, el cuatro lo ponemos ya que "llevamos 4" de la operación 7×7, el único número entero A que cumple con esa relación es A = 6, por lo cual C = 6:

$$\begin{array}{ccc} & 6 & 7 \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & 6 & 9 \end{array}$$

Por lo cual, la respuesta es $A+B+C=6+7+6=19$.

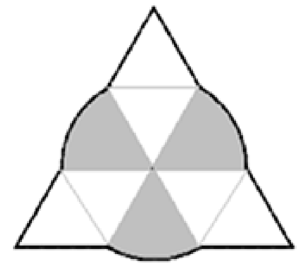
7. (e) Notemos que la cantidad de segmentos inferiores de Cruz 1 es tres, de Cruz 2 es cinco y de la Cruz 3 siete. ¡Cada Cruz tiene dos segmentos inferiores más que la Cruz anterior!



3 segmentos   5 segmentos   7 segmentos

Así pues, se puede deducir que la *cruz* N tiene *2N+1* segmentos inferiores, además, la cantidad de segmentos inferiores es la misma que la cantidad de segmentos superiores, y que de segmentos izquierdos y, también, de segmentos derechos, por lo cual la *cruz* N tiene 4(*2N+1*) segmentos. En nuestro caso, 4(2·2009+1)=16076.

8. (b) Partamos el triángulo en triángulos equiláteros de lado 1 como indica la figura. Entonces todos los ángulos miden 60°, y el perímetro está formado por seis segmentos rectilíneos de 1 *cm* y los tres arcos, con cuya longitud puede formarse media circunferencia.



Así, el perímetro es $6 + \pi$ *cm*.

9. (a) Planteamos la siguiente ecuación, donde x es el número de segmentitos que debemos movernos a partir de la posición de 1/5 para llegar a 1/4:

$$\frac{1}{5} + \frac{x}{16}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

Multiplicamos por 80, que es 16 por 5, para obtener

$$16 + 5x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 20,$$

de donde

$$x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Ahora multiplicamos por 15 y obtenemos

$$(5-3)x = 12,$$

y entonces $x = 6$.

10. (e) Denotemos por n, s y p a las naranjas, las sandías y las peras, respectivamente. El enunciado del problema nos plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 12n + s &= 2s + 3p \\ 3s &= 7p \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 36n + 3s &= 6s + 9p \\ 36n &= 9p + 3s \\ 36n &= 16p \\ 9n &= 4p \\ 45n &= 20p. \end{aligned}$$

Luego, 20 peras equivalen a 45 naranjas.

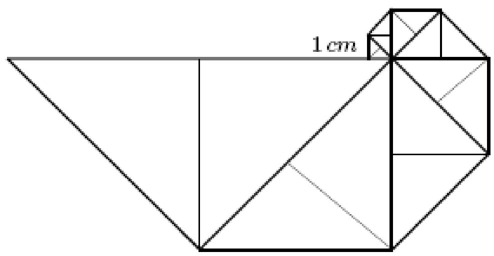
11. (d) Para cualquier repartición, uno de los dos debe tener la moneda de 7 y cada uno debe de tener en total 14 oseps. El número de formas de sumar 7 con los números del 1 al 6 son 4:

6 + 1, 5 + 2, 4 + 3, 4 + 2 + 1.

El otro niño debe tener el resto de las monedas. Entonces hay en total 8 posibles reparticiones: 4 cuando el primer niño tiene la de 7 y otras 4 cuando es el segundo quien la tiene.

12. (b) La mínima cantidad de cifras se obtiene cuando las cifras son lo más grande posible, como la cifra más grande es nueve, y $\frac{2009}{9} = 223 + \frac{2}{9}$, tendríamos que se necesitan, al menos, 224 cifras para que las cifras sumen 2009, uno de ellos podría ser: $2\underbrace{999\ldots9}_{223\ nueves}$.

13. (c) Observemos que cada triángulo que se va poniendo tiene el doble del área del anterior. Esto se puede ver con el teorema de Pitágoras, o bien, haciendo los siguientes trazos



Como el primer triángulo tiene área 1/2, debemos calcular

A = 1/2 + 1 + 2 + 4 +8 + 16+ 32 + 64 = 127.5

14. (c) Por cada semana que pasa hay que multiplicar por 0.8 el precio, hasta que se obtenga algo menor o igual que $200. Es decir, debemos encontrar la primera potencia de (0.8) que sea menor o igual a 0.5.

$(0.8)^0 = 1$
$(0.8)^1 = 0.8$
$(0.8)^2 = 0.64$
$(0.8)^3 = 0.512$
$(0.8)^4 = 0.4096$

Entonces podrá comprar el juguete a partir de la cuarta semana.

15. (b) El 2009 es divisor de $N = \underbrace{20092009\ldots2009}_{2009\ veces\ el\ 2009}$, y $2009 = 7 \times 7 \times 41$. Por lo cual el 7 es un divisor de 2009 y, en consecuencia de N.

¿Habrá un número mayor a 1 y menor a 7 que sea divisor de N? Veamos:

El 2, 4 y 6 no pueden ser divisores de N ya que N es impar.

La suma de las cifras de N es $11 \times 2009 = 22099$ el cual no es múltiplo de tres ya que la suma de sus cifras es 22, que no es múltiplo de 3, por lo cual N no es múltiplo de 3.

N tampoco es múltiplo de 5, por no terminar en 5 ni en 0.

Por lo tanto, el menor número mayor a 1, que es divisor de N es el 7.