VI Olimpiada Mexicana de Matemáticas 1992

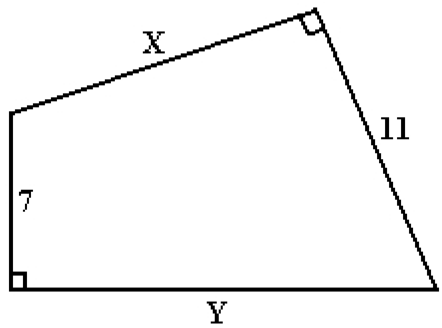
Fase Hidrocálida

Ganadores **Martha Patricia Coronado Guzmán**
Luis Armando Cortés López
Guillermina de Lara Romo
Edgar Rogelio Luévano Martínez
Gabriela Alejandra Morales Serna
Rogelio Salinas Gutiérrez

Primera Prueba

Problema 1.H6.1 Una compañía de teléfonos celulares asegura que la carga de cada uno de sus aparatos dura 90 minutos de conversación continua o hasta 15 horas en espera de llamada (línea libre). Suponiendo cierto lo que anuncia el comerciante, ¿cuánto tiempo duró en conversación un cliente si la carga se le terminó al cabo de 9 horas? (Advertencia: no son 36 minutos)

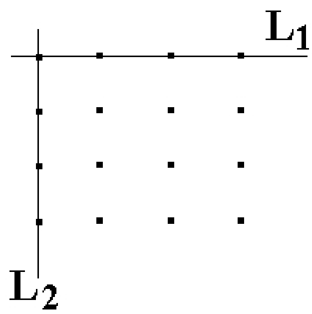
Problema 2.H6.1 El cuadrilátero de la figura tiene en centímetros, medidas enteras y distintas en todos sus lados. Las medidas anotadas, 7 y 11, corresponden a los lados menores. ¿Cuánto miden los lados *X* y *Y*?



Problema 3.H6.1 En la siguiente figura, se tienen 16 puntos que forman una retícula cuadrada y dos rectas, L1 y L2, perpendiculares entre sí.

a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno de sus lados sea paralelo a L_1 ni a L_2?

b) ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno se sus lados sea paralelo a L_1 ni a L_2?



Problema 4.H6.1 Mediante la utilización del producto notable

$$(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+xy^{m-2}+y^{m-1})=x^m-y^m \text{ , si } m\in \mathbf{N}$$

es posible demostrar que $2^{3k}-1$ es divisible entre 7 y que $2^{2k}-1$ es divisible entre 3, para todo valor de $k\in$ **N**.

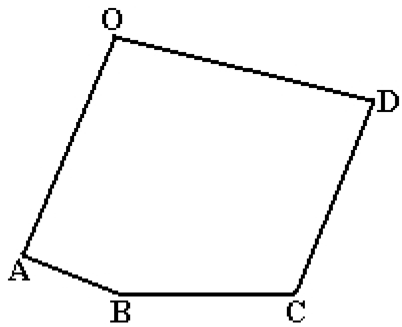
¿De qué forma de ser $n \in$ **N** para que 2^n-1 sea divisible entre 21? Justifica tu respuesta.

Segunda Prueba

Problema 1.H6.2 Se sabe que el producto de 1992 números naturales es 1992. ¿Cuántos de dichos factores tienen que ser iguales a 1? Da el mínimo y máximo de este tipo de factores.

Problema 2.H6.2 En la figura adjunta se tiene que:

$OA=OD$	$\angle OAB=90°$
$AB=6$	$\angle OBC=90°$
$DC=10$	$\angle ODC=90°$



Calcula la medida de *BC*.

Problema 3.H6.2 Di por qué es cierto que:

$$\text{si } n > 0\text{, entonces } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

Problema 4.H6.2 Demuestra que $8n(n^2+5)$ es divisible por 48 para todo valor de $n \in \mathbf{N}$.

VI Olimpiada Mexicana de Matemáticas 1992

Fase Nacional

Logros **Gabriela Alejandra Morales Serna**

- **3er Lugar**

Rogelio Salinas Gutiérrez

- **3er Lugar**

Problema 1.N6
Un tetraedro *OPQR* es tal que los ángulos *POQ*, *POR* y *QOR* son rectos. Muestre que si *X*, *Y*, *Z* son los puntos medios de *PQ*, *QR* y *RP*, entonces el tetraedro *OXYZ* es isósceles, es decir, tiene sus 4 caras iguales..

Problema 2.N6
Sea p un número primo, diga cuántas cuartetas (a, b, c, d) de enteros positivos hay con $0 < a, b, c, d < p-1$ y tales que $ad-bc$ sea múltiplo de p.

Problema 3.N6
Considere siete puntos dentro o sobre un hexágono regular y pruebe que tres de ellos forman un triángulo cuya área es menor o igual que 1/6 del área del hexágono.

Problema 4.N6
Muestre que 100 divide a 1 + 1111 + 111111 +…+ 1111111111111111111.

Problema 5.N6
Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Si

$$S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$$

pruebe que $6 < S < 3\sqrt{5}$

Problema 6.N6
Sea *ABCD* un rectángulo. Sean *I* el punto medio de *CD* y *M* la intersección de *BI* con la diagonal *AC*.

a) Pruebe que *DM* pasa por el punto medio de *BC*.

b) Sea *E* el punto exterior al rectángulo tal que *ABE* sea un triángulo isósceles y rectángulo en *E*. Además, supongamos que $BC = BE = a$. Pruebe que *ME* es bisectriz del ángulo *AMB*.

c) Calcule el área del cuadrilátero *AEBM* en función de *A*.

Solución a los Problemas Hidrocálidos

Solución a 1.H6.1

Se sabe que la carga de 90 minutos de conversación es igual a la carga de 900 minutos de línea libre, esto es que, 1 minuto de conversación equivale a 10 minutos de línea libre. Lo anterior puede decirse de la siguiente manera: x minutos de conversación equivalen a 10x minutos de línea libre. Como la carga duró 540 minutos, hay una faltante de 360 minutos de línea libre, cuya correspondiente carga debió utilizarse en conversación. Con la información anterior concluimos que el tiempo que habló (x) más 360 minutos debe ser igual a $10x$:

$$x+360 = 10x,$$

por lo tanto, $x = 40$minutos.

Solución a 2.H6.1

Los lados de medidas X y 11 forman un triángulo rectángulo, lo mismo puede decirse de los dos lados restantes. Además, ambos triángulos rectángulos comparten una misma hipotenusa, por tanto:

$$X^2 + 11^2 = Y^2 + 7^2, \text{ por lo tanto}$$

$$Y^2 - X^2 = 72$$

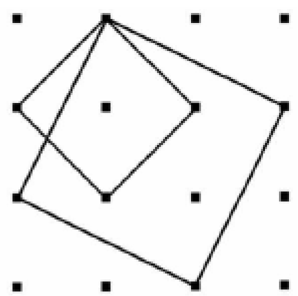
O equivalentemente: $(Y + X)(Y - X) = 72$.

Como X y Y son números enteros, entonces cada uno de los paréntesis de la última ecuación debe corresponder con los posibles factores enteros de 72. Cada factorización dará lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las que al resolverse nos darán las posibles medidas de los lados.

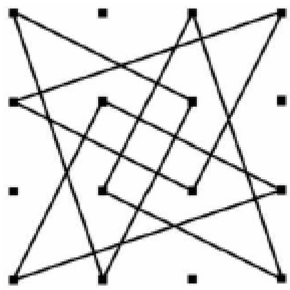
Factor de 72		**Medidas de:**		**Observaciones**
$Y + X$	$Y - X$	X	Y	
72	1	——	——	No hay solución entera.
36	2	17	19	
24	3	——	——	No hay solución entera.
28	4	7	11	No son medidas distintas a las dadas.
12	6	3	9	No son medidas distintas a las dadas.
9	8	——	——	No hay solución entera.

Como puede verse, la única solución que cumple las condiciones pedidas es X=17cm y Y=19cm.

Solución a 3.H6.1



a) Los únicos cuadrados que no tienen sus lados paralelos a la recta L_1, ni a la recta L_2 son aquellos cuyos lados miden 2 o 5 unidades. En total hay **seis** cuadrados como los pedidos: del primer tipo hay **cuatro** cuadrados; y **dos** del segundo tipo.



b) Los triángulos solicitados son **dieciséis**, todos ellos tienen catetos de $\sqrt{5}$ unidades, e hipotenusa de $\sqrt{10}$ unidades.

Cada uno de los cuadrados del segundo ti o, señalado en **a)**, nos da cuatro triángulos, es decir, ocho; los ocho restantes se obtienen mediante traslaciones horizontales o verticales de los anteriores. En la figura están cuatro de éstos triángulos, los que corresponden a las traslaciones de los cuatro triángulos del cuadrado dibujado en **a)**.

Solución a 4.H6.1

Demostraremos que si n=6k, con $k \in$ **N,** entonces 2^n-1 es divisible entre 21, porque:

1) $2^{6k}-1 = (2^2)^{3k}-1 = 4^{3k}-1 = (4-1)(4^{3k-1}+4^{3k-2}+\ldots+4+1) = 3(4^{3k-1}+4^{3k-2}+\ldots+4+1)$, que es múltiplo de 3.

2) $2^{6k}-1 = (2^3)^{2k}-1 = 8^{2k}-1 = (8-1)(8^{2k-1}+8^{2k-2}+\ldots+8+1) = 7(8^{2k-1}+8^{2k-2}+\ldots+8+1)$, que es múltiplo de 7.

3) Según lo anterior, $2^{6k}-1$ es múltiplo de 3 y múltiplo de 7, por lo tanto, $2^{6k}-1$ es múltiplo de 21.

Ahora demostraremos que si 2^n-1 es divisible entre 21, entonces n=6k:

$$2^n-1 = 2^{6k+r}-1,\ r \in [0, 1, 2, 3, 4, 5]$$
$$2^{6k+r}-1 = 2^{6k+r} + 2^r - 2^r - 1$$
$$2^{6k+r}-1 = 2^r\,(2^{6k}-1) + 2^r - 1$$

$2^r\,(2^{6k}-1)$ es divisible por 21 dado lo que habíamos demostrado, y $2^r - 1$ es divisible entre 21 sólo cuando r=0 (con r=1 obtenemos 1, con r=2 obtenemos 3, con r=3 obtenemos 7, con r=4 obtenemos 15, y con r=5 obtenemos 31) por lo tanto, n de ser igual a 6k para ser divisible entre 21.

Solución a 1.H6.2

Al factorizar a 1992 en números primos se tiene que 1992=2x2x2x3x83. De aquí se puede ver que no puede haber más de cinco factores distintos de 1, por tanto habrá cuando menos 1987 factores iguales a 1.

Por otra parte, al menos debe haber un factor distinto de 1, a saber 1992, y los 1991 factores restantes de en ser iguales a 1.

De lo anterior concluimos que como mínimo hay 1987 factores iguales a 1 y como máximo 1991.

Solución a 2.H6.2

Sea $OA = m = OD$ y sea $x = BC$, utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos que la hipotenusa del triángulo OAB es $\sqrt{m^2+36}$?y la hipotenusa del triángulo ODC es $\sqrt{m^2+100}$. Aplicando otra vez el teorema de Pitágoras en el triángulo OBC obtenemos la siguiente ecuación:

$$m^2 + 36 + x^2 = m + 100$$

por lo tanto, $x = 8$.

Solución a 3.H6.2

Se sabe que si $a^n<b^n$, con a, b y n son positivos, entonces $a<b$, y viceversa. Aplicando este hecho a la desigualdad, el problema se reduce a demostrar la siguiente desigualdad

$$1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2.$$

Desarrollando el segundo miembro tenemos que

$$1+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n},$$

luego, restando $1+\frac{1}{n}$ a ambos miembros, el problema se reduce –una vez más- a demostrar que $0<\frac{1}{4n}$. Como esta última desigualdad es evidente para todo n positivo, el problema queda demostrado.

Solución a 4.H6.2

Es inmediato ver que $8n(n^2+5)$ es divisible por 8, así que el problema se reduce a demostrar que $n(n^2+5)$ es divisible entre 6. Observemos que $n(n^2+5) = n(n^2-1+6) = n(n^2-1)+6n$. Como el segundo término es divisible entre 6 -una vez más- reducimos el problema a demostrar que $n(n^2-1)$ es divisible entre 6.

Esto último se vuelve claro al factorizar $n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)=(n-1)n(n+1)$, pues de dos números consecutivos uno de ellos es par, y de tres números consecutivos uno de ellos es múltiplo de 3, concluyendo que $n(n^2-1)$, a la vez, múltiplo de 2 y de 3, es decir, que es múltiplo de 6.

Sugerencias para los Problemas Nacionales

Sugerencia 1.N6
Pruebe que el segmento ZY mide la mitad del PQ y, que en el triángulo POQ, el segmento XO también mide la mitad del PQ.

Sugerencia 2.N6
Muestre que si $0 < a \leq p-1$ y e es un entero, entonces existe una única c tal que $0 < c \leq p-1$ y $ac \equiv e \text{ (módulo } p)$. También vea que si $bd \equiv 0 \text{ (módulo } p)$, entonces $b \equiv 0 \text{ (módulo } p)$ ó $c \equiv 0 \text{ (módulo } p)$.

Sugerencia 3.N6
Pruebe que todo triángulo contenido en un paralelogramo abarca a lo más la mitad del área.

Sugerencia 4.N6
Hay que probar que este número es congruente a 0 módulo 100. Todos los números 11, 111, …, 1111111111 son congruentes a 11 módulo 100.

Sugerencia 5.N6
Para una de las desigualdades, calcule S^2, y demuestre que unos de los números x, y, z es mayor o igual que 1.
Para la otra hay que usar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica:

$$\text{si } a,b \geq 0 \text{ entonces } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Sugerencia 6.N6
(a) Use que los triángulos ABM y CIM son semejantes para ver que DM es la mediana del triángulo DBC.
(b) Basta probar que A, M, B y k están todos en la misma circunferencia (¿por qué basta?). Para hacer esto, basta ver que el ángulo AMB mide 90° (¿por qué basta?). Esto último se puede comprobar usando el teorema de Pitágoras.