PRIMERA PRUEBA. 28 DE AGOSTO DE 1999

PROBLEMAS

1. Fíjate en la primera estrella, la cual está formada por 12 triángulos equiláteros. Cada número indica cuántos triángulos negros tienen vértice allí.
    a. Copia la estrella blanca, e ilumina los triángulos que necesites, para que todos los números de los vértices sean iguales y distintos de cero.
    b. ¿Puede existir una estrella, donde la suma de todos los números de los vértices sea 29?(Justifica tu respuesta.)
2. El perímetro de la figura adjunta está formado por arcos de circunferencia que tienen 1 o 2cm de radio y cuyos centros sólo están en los vértices del triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es su área?
3. Supongamos que la tierra es completamente esférica y que se tiene una cuerda que la ciñe justamente por el ecuador. A la longitud de la cuerda se le añade un metro más y la holgura que se reparte de tal manera que la cuerda esté a la misma altura de la superficie en el ecuador (es decir, sigue formando una circunferencia pero de radio un poco mayor). Calcula la longitud de esta altura. Nota: No se te dará el radio de la tierra, pues no se requiere su valor para resolver el problema.
4. Se tiene una retícula cuadrada con doce puntos (donde se intersectan las líneas). ¿Cuántos triángulos hay, que tienen sus tres vértices en dichos puntos y su área es mayor que cero?

SOLUCIONES

1.
    a. Cualquiera de las siguientes figuras satisface lo que se pide.
    b. Llamemos triángulo exterior a los picos de la estrella y triángulo central al que tiene vértice en el centro. Cada triángulo exterior negro aporta 2 unidades a la suma de los números; cada triángulo negro interior aporta 3 unidades a la suma. Así, si E es la cantidad de triángulos exteriores y C es la cantidad de triángulos centrales, la suma, S, de los números será S=2E + 3C, donde $0 \le E \le 6$, y $0 \le C \le 6$.

       El Problema pide que S=29, los valores enteros positivos que cumplen la ecuación 29=2E + 3C no pueden cumplir la condición de ser menores o iguales a 6.

       En efecto:

       Para E=4 y C=6, se tiene S=26
       Para E=5 y C=5, se tiene S=26
       Para E=5 y C=6, se tiene S=26
       Para E=6 y C=6, se tiene S=26
       Para E=6 y C=6, se tiene S=26

2. El área del triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{4}$, pues por el Teorema de Pitágoras podemos calcular su altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Con los tres sectores pequeños se puede formar una semicircunferencia de radio 1, es decir el área sumada de estos tres es: $\frac{\pi(1)^2}{2} = \frac{\pi}{2} cm^2$.

De manera análoga, con tres sectores que tienen radio 2 se puede formar una semicircunferencia de la siguiente manera:

Dicha semicircunferencia tiene área $\frac{\pi(2)^2}{2} = 2\pi cm^2$. Si sumáramos el área de ambas semicircunferencias tendríamos el área de la figura solicitada, aumentada en dos triángulos equiláteros con lado de 1cm.

Es decir el área de la figura solicitada es: $\frac{\pi}{2} + 2\pi - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{5\pi - \sqrt{3}}{2} cm^2$, que es 6.99cm^2 aproximadamente.

3. Si r es el radio de la tierra, la cuerda tiene una longitud de $2\pi r$ metros. Si a ésta se le añade un metro, la longitud de la nueva circunferencia será $2\pi R$, donde R será su radio; además, $2\pi R = 2\pi r + 1 \therefore r = \frac{2\pi R - 1}{2\pi}$.

   La altura estará dada por la diferencia de los radios: $h = R - r$.

   $h = R - \frac{2\pi R - 1}{2\pi} \therefore h = \frac{2\pi R - 2\pi R + 1}{2\pi} \therefore h = \frac{1}{2\pi}$. Así h=0.159 metros.

4. Puesto que los triángulos deben tener tres vértices, lo primero que deberemos hacer será contar las ternas de puntos que se pueden formar. El primer vértice puede ser cualquiera de los 12 puntos de la retícula; el segundo lo deberemos elegir de entre los once puntos restantes, y el tercer vértice será uno cualquiera de los últimos diez puntos que quedan, después de haber escogido los dos anteriores. De esta manera, hay en total 12·11·10=1320 formas de escoger ordenadamente a los tres puntos. Pero hay un problema: supón que escogiste primero el punto A, después al B y por último al C; es decir, con la terna (A, B, C) formaste al triángulo ABC, pero al mismo triángulo lo formarás con la terna (A, C, B), o con la (B, A, C) o con otras tres ternas más. ¡Hay seis ternas por cada triángulo! Esto significa que hay $\frac{1320}{6} = 220$ triángulos con vértices distintos.

   Sin embargo, algunos de esos 220 triángulos tienen área cero, por ello deberemos eliminar también las ternas de puntos que estén alineadas. Estas son: cuatro horizontales (una en cada línea horizontal); doce verticales (cuatro en cada línea vertical); y cuatro que forman líneas inclinadas.

   Estas veinte ternas que forman triángulos de área cero habrá que restarlas a los 220 triángulos distintos que habíamos contado, por lo tanto quedarán 200 triángulos.

SEGUNDA PRUEBA 4 DE SEPTIEMBRE DE 1999

PROBLEMAS

1. El lado de un cuadrado mide un metro. Calcula la medida del lado de un triángulo equilátero que está inscrito en el cuadrado, sabiendo que ambas figuras tienen un vértice en común.

2. Si los coeficientes a, b y c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sólo pueden tomar valores enteros del 1 al 10, se tienen mil posibilidades para escribir dicha ecuación ¿Para cuántas de estas posibilidades, la ecuación tendrá soluciones en los números reales (es decir, que no salgan raíces cuadradas de números negativos)?
3. ¿Cuántos números positivos menores que 1999 son divisibles entre 15, y además, tienen como raíz cuadrada un número entero?
4. En un cubo de 6cm de lado se iscribe un tetraedro regular, de tal manera que los cuatro vértices de éste son también vértices del cubo. Calcula el volumen de dicho tetraedro.

SOLUCIONES

1. La figura tiene simetría axial o especular respecto a la diagonal del cuadrado que pasa por el vértice común del triángulo y del cuadrado, y el ángulo de separación entre los respectivos lados es de 15º.
   Empleando trigonometría se obtiene que la medida, en metros, del lado del triángulo es sec15º, esto es $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
   Sin embargo, es posible encontrar la solución mediante el álgebra.
   Al considerar las medidas en metros, la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$; y ésta se puede descomponer en la altura del triángulo equilátero más la mitad del lado de dicho triángulo. Sea x la medida buscada, entonces:
   $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ $\qquad x\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = 2$ $\qquad x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ metros.
2. Sabemos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; entonces, la ecuación tendrá solución en los reales cuando $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no sea negativo, es decir cuando $b^2 \geq 4ac$.
   Sabemos que b puede tomar 10 posibles valores, y para cada uno de ellos hay 100 posibilidades (10 para a y 10 para b). Deberemos contar cada uno de los casos:
   Si b=1 no hay solución en los reales.
   Si b=2 sólo habrá solución cuando a=1 y c=1.
   Si b=3 debe suceder que $3^2 \geq 4ac$ para que exista la solución en los reales, esto es $\frac{9}{4} > ac \therefore 2.25 > ac$, lo que hace tres posibilidades para que exista solución real:
   a=1, c=1;
   a=2, c=1;
   a=1, c=2
   Si b=4, entonces $4^2 > 4ac \therefore 4 \geq ac$, hay ocho posibilidades:
   a=1, c=1
   a=1, c=2
   a=1, c=3
   a=1, c=4
   a=2, c=1
   a=2, c=2

a=3, c=1
a=4, c=1

Si b=5, $25 \geq 4ac \therefore 6.25 \geq ac$, hay catorce posibilidades:

Si a=1, c=1,2,3,4,5 o 6
Si a=2, c=1,2 o 3
Si a=3, c=1 o 2
Si a=4, c=1
Si a=5, c=1
Si a=6, c=1

Si b=6, $36 \geq 4ac \therefore 9 \geq ac$, hay veintitrés posibilidades:

Si a=1, c=1,2,3…,9 $(c \leq 9)$
Si a=2, c=1,2,3 o 4 $(c \leq 4)$
Si a=3, c=1,2 o 3 $(c \leq 3)$
Si a=4, c=1 o 2 $c \leq 2$
Si a=5,6,7,8 o 9 c=1 (cinco posibilidades)

Si b=7, $49 \geq 4ac \therefore 12.25 \geq ac$, hay treinta y una posibilidades:

Si a=1, $(c \leq 10)$ diez posibilidades
Si a=2, $(c \leq 6)$ seis posibilidades
Si a=3, $(c \leq 4)$ cuatro posibilidades
Si a=4, $c \leq 3$ tres posibilidades
Si a=5 o 6 $c \leq 2$ cuatro posibilidades (dos para a y dos para c)
Si $a \geq 7, c = 1$ cuatro posibilidades

Si b=8, $64 \geq 4ac \therefore 16 \geq ac$, hay treinta y ocho posibilidades:

Si a=1, $(c \leq 10)$ diez posibilidades
Si a=2, $(c \leq 8)$ ocho posibilidades
Si a=3, $(c \leq 5)$ cinco posibilidades
Si a=4, $c \leq 4$ cuatro posibilidades
Si a=5 $c \leq 3$ tres posibilidades
Si a=6,7 u 8, $c \leq 2$ seis posibilidades(tres para a y dos para c)
Si a=9 o 10, c=1 dos posibilidades

Si b=9, $81 \geq 4ac \therefore 20.25 \geq ac$, hay cuarenta y seis posibilidades:

Si $a \leq 2$, $(c \leq 10)$ veinte posibilidades
Si a=3, $(c \leq 6)$ seis posibilidades
Si a=4, $(c \leq 5)$ cinco posibilidades
Si a=5, $c \leq 4$ cuatro posibilidades
Si a=6 $c \leq 3$ tres posibilidades
Si $a \geq 7, c \leq 2$ ocho posibilidades

Si b=10, $100 \geq 4ac \therefore 25 \geq ac$, hay cincuenta y tres posibilidades:

Si $a \leq 2$, $(c \leq 10)$ veinte posibilidades
Si a=3, $(c \leq 8)$ ocho posibilidades
Si a=4, $(c \leq 6)$ seis posibilidades
Si a=5, $(c \leq 5)$ cinco posibilidades
Si a=6 $c \leq 4$ tres posibilidades
Si a=6,7 u 8, $c \leq 3$ seis posibilidades
Si a=9 o 10, $c \leq 2$ cuatro posibilidades

Lo que nos da un total de 213 (0+1+3+4+14+23+31+38+46+53) posibilidades de que la ecuación tenga solución en los números reales.

3. Los números buscados deber ser divisibles entre 15, es decir, son múltiplos de 15, por tanto son de la forma 15p, siendo p un número natural.
   Sin embargo, deben tener raíz cuadrada exacta, por lo que p debe estar formado por el producto de 15 y n^2, con n un número natural. Entonces deberá ser de la forma $15(15n^2) = 15^2 n^2 = 225n^2$
   Además, 225^2 debe ser menor que 1999:
   $225n^2 > 1999 \therefore n < \sqrt{8.8} \therefore n < 2.98$, lo que significa que n=1 o 2.
   Así, solo hay dos números que cumplen lo pedido: 225 y 900.
4. El cubo, de volumen 216cm3, se descompone en el tetraedro regular y cuatro pirámides idénticas. El volumen de cada pirámide es de 36cm3, pues la base es un triángulo rectángulo con área $B = \frac{6.6}{2} = 18cm^2$ y altura de 6cm.
   El volumen de la pirámide es $V = \frac{1}{3}(18)(6) = 36cm^3$, como ya se habia dicho.
   El volumen T del tetraedro es igual al volumen del cubo menos el volumen de las cuatro pirámides
   $T = 6^3 - 4(36) = 216 - 144$
   $T = 72cm^3$