18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

FINAL - PROBLEMAS

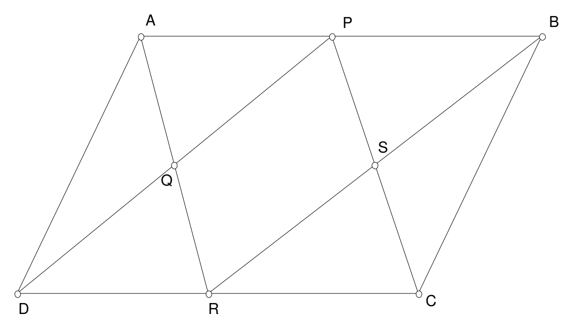
11 DE SEPTIEMBRE DE 2004

Problema 1.
Encuentra un número **i** que cumpla con las siguientes dos condiciones:
(a) el número termina en 4, y
(b) si quitamos este 4 del final y lo ponemos al inicio del número, el nuevo número obtenido es igual cuatro veces el original. (Por ejemplo, el número **i** = 2004 satisface la propiedad (a) pues termina en 4, sin embargo, si quitamos el 4 del final y lo ponemos al inicio del **i**, el nuevo número obtenido es 4200, el cual es distinto a 4**i** **=** 4x2004 = 8016. Debes encontrar un número **i** que satisfaga las condiciones (a) y (b).)

Problema 2
Alejandra y Luz están jugando con fichas. El juego consiste en lo siguiente: Al principio ponen 2 pilas con 2004 fichas en cada una. En cada turno se escoge una pila y se toma de ella la cantidad de fichas que quieran, el último en tomar fichas gana (es decir quién ya no pueda tomar fichas pierde). Primero juega Alejandra y luego Luz, si suponemos que las dos son expertas en este juego, ¿hay forma de saber quién será la ganadora? En caso afirmativo da una estrategia que la hace ganadora, en caso contrario argumenta.

Problema 3.
En la figura:

- **ABCD** es un paralelogramo.
- **P** y **R** están sobre los segmentos **AB** y **CD**, respectivamente.
- Los segmentos **DP**, **CP**, **AR** y **BR** son bisectrices de los ángulos $\angle$**ADC**, $\angle$**BCD**, $\angle$**DAB** y $\angle$**CBA**, respectivamente.



(a) Demuestra que **P** y **R** son los puntos medios de los segmentos **AB** y **CD**, respectivamente.
(b) Demuestra que **PQRS** es un rectángulo
(c) Calcula el área de **PQRS** si se sabe que el área de **ABCD** es igual 1.

Problema 4
Sea a_n la última cifra de n^n, es decir: $a_1 = 1$ (la última cifra de $1^1 = 1$), $a_2 = 4$ (la última cifra de $2^2 = 4$), $a_3 = 7$ (la última cifra de de $3^3 = 27$), etcétera.
Calcula la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2003} + a_{2004}$.

18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

FINAL.-SOLUCIONES

11DE SEPTIEMBRE DE 2004

Solución al Problema 1

Supongamos que a_1, a_2, …, a_n son los dígitos de un cierto número **i** ($i=a_1a_2\ldots a_n$) que satisface las dos condiciones deseadas. Entonces tenemos que $a_n=4$, pues i debe de satisfacer la primer propiedad. Como **i** debe satisfacer la segunda propiedad entonces tenemos que el número $4a_1a_2\ldots a_{n-1}$ es igual a 4 veces **i**, o equivalentemente, que la siguiente división tiene residuo igual a cero:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}4 \\ \cline{2-2} 4 & 4a_1a_2a_3\ldots a_{n-1} \end{array}$$

Para encontrar el valor de los dígitos $a_1,\ldots,a_{n-1}$ basta completar (o reconstruir) dicha división. Es fácil ver que $a_1=1$, pues al hacer el primer paso de la división: 4 entre 4 es 1 y sobra cero. Aunque en este primer paso de la división, hemos encontrado residuo cero, es claro que i = 4 no satisface las dos condiciones deseadas, así que debemos continuar la división

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 1a_2a_3\ldots a_{n-1}4 \\ \cline{2-2} 4 & 41a_2a_3\ldots a_{n-1} \\ & 0 \end{array}$$

Ahora es claro que $a_2=0$, pues al hacer el segundo paso de la división: 1 entre 4 toca a cero y sigue sobrando 1.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 10\,a_3\ldots a_{n-1}4 \\ \cline{2-2} 4 & 4\,10\,a_3\ldots a_{n-1} \\ & 0\,1 \end{array}$$

Tenemos que $a_3=2$, pues al hacer el tercer paso de la división: 10 entre 4 es 2 y sobra 2.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 102\ \ldots a_{n-1}4 \\ \cline{2-2} 4 & 4\,10\,2\ \ldots a_{n-1} \\ & 0\,10 \\ & \quad 2 \end{array}$$

Siguiendo este proceso, en tres pasos más obtenemos que el residuo es cero, es decir, encontramos el número que buscábamos: **i**=102564

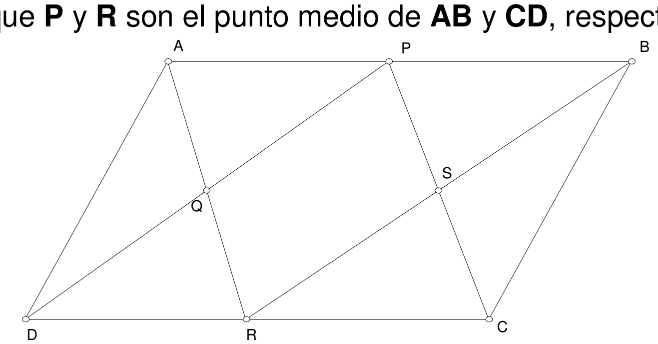
$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & \ \ 102564 \\ \cline{2-2} 4 & 4\,10256 \\ & 0\,10 \\ & \quad\ 22 \\ & \quad\quad 25 \\ & \quad\quad\ 16 \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Solución al Problema 2

Notemos que si después de varios turnos, en un montón ya no quedan fichas el jugador siguiente gana, sólo tiene que tomar todas las fichas del otro montón. Usando lo anterior, demostraremos que el segundo jugador gana: la estrategia a seguir es tomar tantas fichas como el primer jugador tome pero del montón contrario, dejando siempre las dos pilas con la misma cantidad de fichas. De esa manera, el primer jugador será el primero en acabar las fichas de un montón lo que le dará la oportunidad al segundo de tomar las restantes de la otra pila. Por lo cual, Luz gana.

Solución al Problema 3.

(a) Por tratarse de bisectrices (AD y AR), si $\angle$**ADP** = $\angle$**PDC** = **i** y $\angle$**DAR** = $\angle$**BAR** = **a,** entonces, al considerar ángulos alternos internos entre paralelas, $\angle$**APD** = **i** y $\angle$**ARD** = **a**. De este modo, los triángulos **ADR** y **ADP** son isósceles, por lo que **AP** = **AD** = **DR**. Con un razonamiento análogo, al utilizar las otras dos bisectrices (CP y BR), concluimos que **BP** = **CB** = **CR**. En el paralelogramo, los lados opuestos miden lo mismo, por lo que estos seis segmentos (**AP**, **AD**, **DR**, **BP**, **CB** y **CR)** son iguales, con ello concluimos que **P** y **R** son el punto medio de **AB** y **CD**, respectivamente.



(b) Tenemos que 4**i + **4**a = 360°**, de aquí que **i** + **a = 90°**. Así, el ángulo $\angle$**DPC** = **180°** – (**i** + **a**) = 180° – 90° = 90°, y análogamente, $\angle$**ARB =** 90°. Por otra parte, puesto que **i** + **a = 90°**, el triángulo **AQD** tiene un ángulo recto en el vértice **Q**, y de manera análoga el triángulo **BSC** tiene un ángulo recto en el vértice **S**. Finalmente, porque en los cuatro vértices los ángulos son rectos, concluimos que **PRQS** es un rectángulo.

(c) Claramente, **APRD** es un rombo con área igual a ½, de modo que el área de los triángulos **AQP**, **PQR**, **RQD** y **DQA** es igual a ¼ del área de dicho rombo, es decir, un octavo del área de **PQRS**. Lo mismo pasa con **PBCR**, así que el área de **PQRS** es igual a ¼.

Solución al Problema 4

Si un número termina en 1, 5, 6, ó 0, cualquier potencia terminará en el mismo dígito: 1, 5, 6 ó 0.

Cuando un número termina en 4, al elevarlo a un exponente impar, el resultado terminará en 4 y, al elevarlo a un exponente par, el resultado terminará en 6; puesto que un número terminado en 4 es par, si n termina en 4, entonces n^n terminará en 6. Algo parecido sucede para los números que terminan en 9: si se elevan a un exponente impar, el resultado terminará en 9 y, si la potencia es par, entonces terminarán en 1, por lo que si n termina en 9 n^n siempre terminará en 9.

Cuando un número terminado en 2 se eleva a un exponente, la terminación del resultado puede ser 6, 2, 4 u 8, dependiendo de que el exponente al que se eleva sea de la forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ o $4k+3$, respectivamente, por lo que si $n=4$, n^n será 6 ó 4.

Haciendo un razonamiento análogo con los números terminados en 3, 7 y 8 tenemos que si $n=3$, n^n terminará 3 ó 7, si $n=7$, n^n será 7 ó 3, y si $n=8$, n^n será 4 ó 6.

Resumiendo:
a) Siempre tienen la misma terminación (los que terminan en 1, 5, 6 ó 0).
b) Tienen dos tipos de terminaciones, (los que terminan en 4 ó 9), y para este problema n^n siempre tendrá la misma terminación.
c) Tienen cuatro tipos de terminaciones (los que terminan en 2, 3, 7 u 8), que se van alternando.

Por lo anterior, sólo basta calcular la suma de los primeros 20 términos, ya que se repetirá esta suma cada veintena:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Suma
a_n	1	4	7	6	5	6	3	6	9	0	1	6	3	6	5	6	7	4	9	0	94

Entonces $a_1+a_2+\ldots+a_{2000}=100\text{x}94=9400$, por lo cual:
$a_1+a_2+\ldots+a_{2000}+a_{2001}+a_{2002}+a_{2003}+a_{2004}=9400+1+4+7+6=9418$.