FINAL, 06 de septiembre de 2008

SOLUCIONES

1. a) Veremos que una colección buena tiene como máximo tres elementos. Para esto, hacemos primero las siguientes observaciones:

O$_1$. Como los elementos de una colección buena deben tener exactamente cuatro divisores (enteros y positivos), entonces tales elementos sólo pueden ser de dos formas: pq o p^3, siendo p y q números primos.

O$_2$. No hay ternas buenas con más de 3 elementos. En efecto, de entre cuatro enteros consecutivos, siempre habrá uno que sea múltiplo de 4, digamos que es igual a $4n$. Luego, si $n = 1$ tenemos que $4n = 4$, pero 4 sólo es divisible por 1, 2 y 4, por lo tanto no puede estar en una colección buena. Ahora, si $n > 1$, para cualquier primo p que divida a n tendremos que $4n$ será divisible por 1, 2, 4, p, $2p$ y $4p$, con lo cual no puede estar en una colección buena.

O$_3$. Una terna buena debería de tener dos elementos impares y uno par. En efecto, de la observación O$_2$ se sigue que tal terna no podría tener dos pares consecutivos, pues alguno de ellos sería múltiplo de 4.

Para facilitar la notación posterior definimos los números malos como aquellos que no pueden pertenecer a una colección buena. A la luz de las observaciones anteriores podemos afirmar que son números malos los siguientes: los múltiplos de 4, los primos y los cuadrados.

Resta encontrar una terna buena para demostrar que una colección buena puede tener máximo tres elementos. Para encontrar dicha terna podemos combinar lo que ya hemos obtenido en las observaciones y hacer una criba de, por ejemplo, los primeros 100 enteros.

n^2	p	p		p	$\boxed{6}$	p		n^2	$\boxed{10}$
p		p	$\boxed{14}$	15		p	18	p	
21	$\boxed{22}$	p		n^2	$\boxed{26}$	27		p	30
p		33	$\boxed{34}$	35		p	$\boxed{38}$	39	
p	42	p		45	$\boxed{46}$	p		n^2	50
51		p	54	55		57	$\boxed{58}$	p	
p	$\boxed{62}$	63		65	66	p		69	70
p		p	$\boxed{74}$	75		77	78	p	
n^2	$\boxed{82}$	p		85	$\boxed{86}$	87		p	90
91		93	$\boxed{94}$	95		p	98	99	

Empezamos por hacer una tabla de 10×10 y quitar todos los números malos que conocemos: borramos todos múltiplos de 4; quitamos luego todos los primos (dejando un su lugar una p para indicar que en esa posición se quitó un primo); quitamos todos los cuadrados (dejando en su lugar una n^2).

Ahora nos fijamos en los números de la forma $2r$, con r primo, encerrando estos números en un cuadrado más marcado.

Está claro que 6, 10, 14, 22, 26, 38, 46, 58, 62, 74 y 82 no pueden pertenecer a una terna buena pues o bien el entero que le antecede, o bien el que le precede, es malo. Vemos luego que, por ejemplo, (33, 34, 35) Podría ser una terna buena, lo cual confirmamos al ver que 33 y 35 tienen exactamente cuatro divisores pues son el producto de dos primos, concluyendo así nuestra búsqueda, afirmando que una colección buena puede tener como máximo tres elementos.

b) Ya observamos que los elementos de toda colección buena sólo pueden ser de la forma pq, o bien, de la forma p^3, siendo p y q primos. Además, al constar de dos enteros consecutivos, toda pareja buena deberá tener un elemento par y uno impar.

Así pues, si uno de los números par fuera $p^3 = 8$, las parejas que se obtendrían serían (8, 9) y (7, 8), ninguna de las cuales es buena, entonces el número par es del tipo $2p$, que al multiplicarlo por el impar de la pareja, no da un múltiplo de 60 ya que 60 es divisible entre 4, y el producto de la pareja sólo tiene una vez al factor 2. Por tanto no existen parejas buenas cuyo producto sea múltiplo de 60.

2. Para que se forme el número 4321, se requieren números de al menos cuatro cifras pues los dígitos son diferentes y su orden es descendente y consecutivo.

Si éstas cifras pertenecen a un solo número, 4321 sería el menor de ellos, y seguirían números de cinco o más cifras: 14321, 24321, etcétera.

Si pertenecen a la unión de dos números consecutivos, significa que **4321** se puede partir en uno de los tres lugares señalados con p_1, p_2 o p_3 en **4**p_1**3**p_2**2**p_3**1.**

Cuando se parte en p_1, la pareja más pequeña de números consecutivos es 321**4**p_1**321**5, le siguen números de la forma 321C**4**p_1**321**C5, donde C es una cadena cualquiera de una o más cifras (siempre seguirían números de cinco o más cifras por ejemplo para la cadena C = 0, tenemos 3210**4**p_1**321**05; para la cadena C = 797, se obtiene 321797**4**p_1**321**7975, etcétera).

Cuando se parte en p_2, la pareja más pequeña de números consecutivos corresponde a 21**43** p_2**21**44, le siguen números de la forma 21C**43**p_1**21**C44, siempre números de cinco o más cifras, donde C es una cadena cualquiera de una o más cifras.

Cuando se parte en p_3, la pareja más pequeña de números consecutivos corresponde a 1**432**p_3**1**433, le siguen números siempre números de cinco o más cifras, de la forma 1C**432**p_1**1**C433, donde C es una cadena cualquiera de una o más cifras. En esta cadena está 10**432**$p_3$10**433**, que es la pareja más pequeña de cinco cifras.

En resumen, por orden de aparición, las cinco primeras veces los encontramos al escribir

- 1**432** y **1**433
- 21**43** y el **21**44
- 3214 y el 3215
- **4321**
- 10**432** y **1**0433

El siguiente paso, para saber la posición, es el de contar las cifras anteriores a dichos números, considerando, de acuerdo al ejemplo que la posición se indica por el lugar que ocupa el 4 que es el primer dígito de la izquierda en 4321.

Así, en la primera ocasión que aparece es en la posición 4619, pues antes del 1432 hay 4617 cifras, más otras dos para llegar al lugar que ocupa el 4. Esto se obtiene sumando las cifras de la siguiente forma:

- Números de una cifra: 9. En total 9 cifras
- Números de dos cifras: 90 (del 10 al 99). En total 180 cifras
- Números de tres cifras: 900 (del 100 al 999). En total 2700 cifras
- Números de cuatro cifras: 432 (del 1000 al 1431). En total 1728 cifras

Por ello, antes de escribir el 1432, habrá que escribir 4617 = 9 + 180 + 2700 + 1728 cifras. A la cantidad anterior se le deberán sumar dos lugares más para llegar a la posición del 4.

Análogamente se realizan las sumas restantes para localizar la posición:

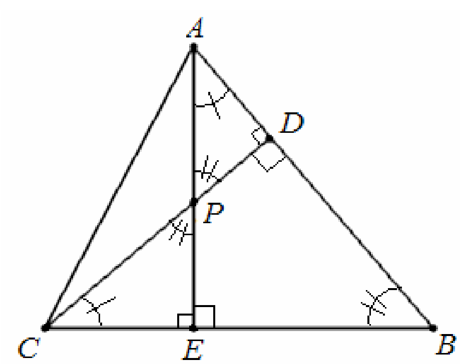
- Antes de escribir el 2143 hay 7461 = 9 + 180 + 2700 + 4572. A la cantidad anterior se le deberán sumar tres lugares más para llegar a la posición del 4.
- Antes de escribir el 3214 hay 11745 = 9 + 180 + 2700 + 8856. A la cantidad anterior se le deberán sumar cuatro lugares más para llegar a la posición del 4.
- Antes de escribir el 4321 hay 16173 = 9 + 180 + 2700 + 13284. A la cantidad anterior se le deberán sumar un lugar más para llegar a la posición del 4.
- Antes de escribir el 10432 hay 41049= 9 + 180 + 2700 + 36000 + 2160. A la cantidad anterior se le deberán sumar tres lugares más para llegar a la posición del 4.

De esta manera, la respuesta a lo solicitado es:

Primera aparición, al escribir 1432 y 1433, en la posición 4619.
Segunda aparición, al escribir 2143 y 2144, en la posición 7464.
Tercera aparición, al escribir 3214 y 3215, en la posición 11749.
Cuarta aparición, al escribir 4321, en la posición 16175.
Quinta aparición, al escribir 10432 y 10433, en la posición41052.

3. Para resolverlo, lo haremos de una manera general considerando a las literales, pero los valores de ellas pueden ser sustituidos en el momento que se quiera. Para simplificar la nomenclatura en las fórmulas que utilizaremos consideremos también las siguientes: $CP = a,\quad AP = b$ y $AD = c$.

Es importante observar que hay cuatro triángulos semejantes: $\Delta CEP \approx \Delta ADP \approx \Delta CBD \approx \Delta ABE$, y que en éstos dos últimos, con la hipotenusa de uno de ellos (que funcionará como base del triángulo original) y un cateto del otro (que será la correspondiente altura del triángulo original) se puede obtener el área pedida.



Aquí calcularemos la base CB y la altura AE para obtener el área del triángulo (lo mismo puede hacerse si calculamos la base AB y la altura CD).

Como $\Delta CEP \approx \Delta ADP \Rightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{AD}{CE} \Rightarrow CE = \dfrac{AD \cdot PC}{PA} \Rightarrow CE = \dfrac{c \cdot a}{b}$

$$PD = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - c^2} \quad \text{y} \quad PE = \sqrt{CP^2 - CE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ca}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - c^2}$$

$$AE = AP + PE = b + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - c^2} = \frac{\left(b^2 + a\sqrt{b^2 - c^2}\right)}{b}$$

Como $\Delta CEP \approx \Delta CBD$, entonces $\frac{CP}{CE} = \frac{CB}{DC}$. De aquí se despeja CB:

$$CB = \frac{CP \cdot DC}{CE} = \frac{CP \cdot (CP + PD)}{CE} = \frac{a\left(a + \sqrt{b^2 - c^2}\right)}{\frac{c \cdot a}{b}} = \frac{b\left(a + \sqrt{b^2 - c^2}\right)}{c}$$

$$\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{CB \cdot AE}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b\left(a + \sqrt{b^2 - c^2}\right)}{c}\right)\left(\frac{b^2 + a\sqrt{b^2 - c^2}}{b}\right) =$$

$$\frac{\left(a + \sqrt{b^2 - c^2}\right)\left(b^2 + a\sqrt{b^2 - c^2}\right)}{2c} = \frac{\left(9 + \sqrt{5^2 - 4^2}\right)\left(5^2 + 9\sqrt{5^2 - 4^2}\right)}{8} = \frac{(9+3)(25 + 9 \cdot 3)}{8}$$

$$= \frac{12 \cdot 52}{8} = 78.$$

Lo que seguramente van a hacer los alumnos es resolverlo en forma numérica:

- Por el teorema de Pitágoras: $PD = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, por lo tanto la altura CD = 9 + 3 = 12.
- Como $\Delta ADP \approx \Delta CBD$, entonces $\frac{12}{4} = \frac{DB}{3}$, de aquí se despeja DB = 9, por lo tanto la base AB = 9 + 4 = 13
- El área pedida es 13 x 12 / 2 = 78.

4. El problema planteado es equivalente a resolver este otro problema:

"Encontrar el valor máximo de $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8$ restringido a que

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2008$ y $x_2 = x_3,\ x_4 = x_5,\ x_6 = x_7 = x_8$."

Sabemos que la media geométrica es menor o igual a media aritmética, es decir:

$$\sqrt[8]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8},$$

por lo cual $\sqrt[8]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8} \le \frac{2008}{8} = 251$. Por lo tanto, el valor máximo que puede tomar el producto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8$ es 251^8 y es fácil verificar que se puede obtener ese valor si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 251$.

Entonces, si hacemos $a = b = c = d = 251$, obtenemos el valor máximo 251^8.