18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

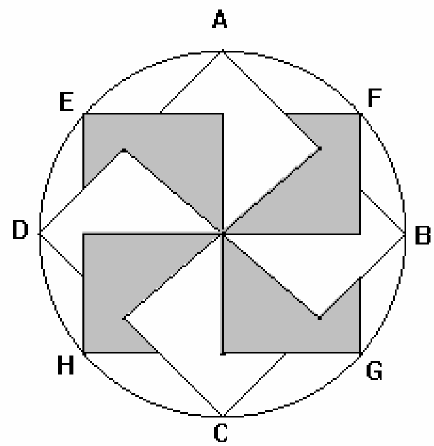
Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

SEMIFINAL - PROBLEMAS

5 DE JUNIO DE 2004

Problema 1

Encuentra el área sombreada de la siguiente figura sabiendo que el radio de la circunferencia es 2004 y que ABCD y EFGH son cuadrados, además de que AF = FB.



Problema 2

Considera un polígono regular convexo de **L**=2004 lados y denótalo por **V**. ¿Cuántos polígonos regulares hay, tales que tengan menos de **L** lados y que sus vértices sean también vértices de **V**?

NOTA: por polígono regular convexo, entenderemos al polígono que tiene lados y ángulos iguales, y que sus lados no se cruzan, sólo coinciden en los vértices.

Problema 3

Los números n, m y k son enteros positivos mayores que 1 y

$$m^k k^n + m^k n k^n + m^k n^2 k^n = 936$$

¿Cuánto vale $mk + mnk + mn^2 k$?

Problema 4

Sea n un número de 2004 cifras y cada una de ellas es 1, es decir:

$n = \overbrace{111...111}^{2004\ cifras}$. Encuentra seis primos, menores de 150, que lo dividan.

Argumenta tu respuesta.

18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

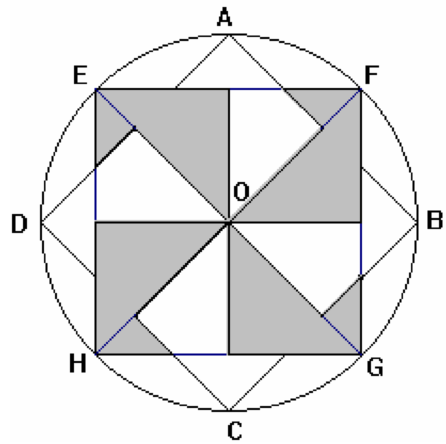
Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

SEMIFINAL.-SOLUCIONES

5 DE JUNIO DE 2004

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Problema 1:



Dibujemos las aristas y diagonales del cuadrado EFGH y llamemos O a su punto de intersección. EOF es un triángulo rectángulo, entonces usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que $EF^2 = 2004^2 + 2004^2$, entonces $EF = 2004\sqrt{2}$.

El área sombreada consiste de cuatro triángulos grandes y cuatro triángulos chicos.

El área de un triángulo grande es la octava parte del área del cuadrado. El área del cuadrado es $(2004\sqrt{2})^2 = 2 \times 2004^2$, entonces cada triángulo tiene de área $\dfrac{2004^2}{4}$, por lo que la suma de las áreas de los cuatro triángulos grandes es 2004^2 (*)

Los triángulos chicos tienen un ángulo recto y otro de 45º, por formarse con la diagonal y un lado del cuadrado, por lo tanto el tercer ángulo es también de 45°,.entonces son isósceles. Uno de sus lados es igual al radio menos la mitad del lado del cuadrado, es decir: $2004 - \dfrac{2004\sqrt{2}}{2} = 2004\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, por lo tanto el área de un triángulo chico es $\dfrac{\left[2004\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2}{2}$, y la suma de las áreas de los cuatro triángulos pequeños es:

$$4\frac{\left[2004\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2}{2} = 2\left[2004^2\,\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4}\right] = 2004^2(3-2\sqrt{2}) \quad (**)$$

Por lo tanto, sumando los resultados (*) y (**) obtenemos:

$$2 \times 2004^2 (2-\sqrt{2})$$

PROBLEMA 2

En lo sucesivo, **P** será el conjunto de todos los polígonos regulares que tengan menos de **L** lados y que sus vértices sean también vértices de **V**.

(1) El número de lados de cada polígono de **P** divide al número **L**:
Elijamos un vértice cualquiera de **V** y denotémoslo por V_0. Luego, sucesivamente y en el sentido de las manecillas del reloj, nombremos al resto de los vértices, V_1, V_2, V_3, ... , V_{2003}. Elijamos otro vértice de **V**, digamos V_r, y formemos la diagonal V_0V_r. Notemos que entre V_0 y V_r. hay exactamente **r-1** vértices de **V** (no se cuentan a los de la diagonal).

Si esta diagonal es además un lado de algún polígono **p** de **P**, entonces, sobre cada lado de **p** habrá **r-1** vértices de **V**. Así, es fácil ver que la suma de la cantidad de vértices que hay sobre los lados de **p**, más la cantidad de vértices de **p** es igual a **L**; o sea, **L = n(r-1) + n = nr**, donde **n** es el número de lados de **p**.

De lo anterior obtenemos que el número de lados cada polígono de **P** debe ser un divisor de **L** ($2004 = 2^2\times3\times167$). En este caso, los posibles valores de **n** son: 3, 4, 6, 12, 167, 167×2, 167×3, 167×4, y 167×6. (Los divisores 1, 2 y 2004 no cumplen con las condiciones.)

(2) Para cada valor de **n** hay **r** polígonos de **n** lados en **P**,pues como **n** divide a **L** y **r=L/n**, el polígono cuyos vértices son V_k, V_{r+k}, V_{2r+k}, V_{3r+k}, ... y $V_{r(n-1)+k}$ es un polígono regular de **n** lados. Pero tendremos un polígono de n lados distinto para cada valor de k = 0, 1, 2, ... , r-1. Así, tenemos **r = L/n** polígonos de **n** lados.

(3) Finalmente hacemos la suma de todos estos posibles polígonos y encontramos los elementos del conjunto **P**: 2004/3 + 2004/4 + 2004/6 +2004/12 + 2004/167 + 2004/334 + 2004/501 +2004/668 +2004/1002 =
= 668 + 501 + 334 +167 + 12 + 6 + 4 + 3+ 2 = 1697

PROBLEMA 3

Como $m^k k^n + m^k n k^n + m^k n^2 k^n = m^k k^n \left(1+n+n^2\right)$ y $936 = 2^3 \times 3^2 \times 13$, entonces tenemos que $m^k k^n \left(1+n+n^2\right) = 2^3 \times 3^2 \times 13$

De lo anterior, se deduce que k debe ser 3 ó 2.
Si k fuese 3, entonces n tendría que ser 2, pero además $1+n+n^2 = 7$, lo cual no puede ser ya que 7 no es factor de 936.
Por tanto sólo queda la otra opción: $k = 2$, $n = 3$ y $m = 3$. Así, al sustituir, se tiene la solución: $mk + mnk + mn^2 k = mk\left(1+n+n^2\right) = (3)(2)(13) = 78$

PROBLEMA 4

Puesto que n tiene 2004 cifras y 2004 es divisible entre 4 y 6, entonces el 1111 es divisor de n, $\dfrac{n}{1111} = \overbrace{100010001...100010001}^{2001\,cifras}$ (tiene 501 unos), y también el 111111, $\dfrac{n}{111111} = \overbrace{1000001000001...1000001000001}^{1999\,cifras}$ (tiene 334 unos). $1111 = 11 \times 101$ y $111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, entonces seis primos que dividen al número n son: 3, 7, 11, 13, 37 y 101.