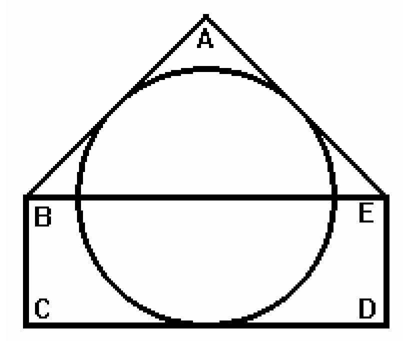
SEMIFINAL

Problema 1: Encuentra tres números a, b y c, distintos, que, del 1 al 100000, haya exactamente 111 múltiplos de a, b o c. (Eso significa que ningún otro número del 1 al 100000, además de los citados 111, puede ser múltiplo de a ni de b ni de c.)

Hay varias soluciones, basta que des una.



Problema 2: En la figura, el segmento BE pasa por el centro de la circunferencia, los segmentos AB, AE y CD son tangentes a la circunferencia, y el ángulo BAE es de 90º. Si el área del polígono ABCDE es 2005 m^2, ¿cuál es el área del círculo?

Problema 3: ¿Cuántas letras **I**, **V**, **X**, **L**, **C**, **D** y **M** se necesitan para escribir todos números del 1 al 2005 en el sistema Romano?

Un pequeño resumen del sistema de numeración Romano:

El Sistema Romano consta de siete letras:
cuatro letras para designar las potencias de diez: **I** = 1; **X** = 10; **C** = 100 y **M** = 1000,
y tres letras para designar potencias de diez multiplicadas por cinco: **V** = 5; **L** = 50 y **D** = 500.

Regla 1: No se pueden duplicar la **V** ni la **L** ni la **D**. No se pueden repetir más de tres veces la **I**, la **X**, la **C** ni la **M** de forma continua. (LXXXIX está bien, pero LXXXX no.)

Regla 2: Todo símbolo colocado a la derecha de otro igual o menor que él, debe sumar su valor a éste. (MMV = 1000 + 1000 + 5 = 2005.)

Regla 3: Todo símbolo colocado a la izquierda de otro mayor se debe restar de éste.

(IX= -1+10 = 9.)

Regla 4: Si entre dos letras existiera otra menor, ésta restará su valor a la siguiente.

(LIV = 50 – 1 + 5 = 54.)

Regla 5: Solamente la **I**, la **X**, y la **C** se pueden utilizar para sustraer y:

i. La **I** solamente puede ser colocada antes de la **V** o de la **X**.
ii. La **X** se puede colocar solamente antes de la **L** o de la **C**.
iii. La **C** sólo puede ir antes de la **D** o de la **M**.

Problema 4: Tenemos un barril lleno de vino. Extraemos un litro de vino del barril y lo tiramos, a continuación volcamos en el barril un litro de agua. Al otro día hacemos lo mismo: extraemos un litro de la mezcla que tiene el barril, lo desechamos, y volcamos un litro de agua en el barril. Al tercer día repetimos lo hecho en los días anteriores, resultando, al final de la operación, que una octava parte del barril es vino. ¿Qué volumen, medido en litros, tiene el barril?

SEMIFINAL

SOLUCIONES

Problema 1 Primero encontramos un número a que tenga exactamente 111 múltiplos, para ello se divide 100000 / 111 = 900.9009009009009009... (Obviamente no se necesitan los decimales.)

Así, el número 900, tiene exactamente 111 múltiplos, del 1 al 100000, a saber:

900 x 1 = 900
900 x 2 = 1800
900 x 3 = 2700
900 x 4 = 3600
.
.
.
900 x 110 = 99000
900 x 111 = 99900

Observa que el siguiente múltiplo, 900 x 112 = 100800, ya no pertenece a los números del 1 al 100000. Así, se puede proponer que a = 900

Aunque falta encontrar otros dos números, b y c, ya no podemos agregar más múltiplos a la lista. Por tanto, b y c deberán tener sólo múltiplos de la lista anterior. Por ejemplo, si b = 1800, sus múltiplos serán sólo de esa lista, y en concreto habrá 55 múltiplos solamente, pero no agregaremos ninguno nuevo y seguirán siendo 111 múltiplos para los dos.

De la misma manera, se puede tomar cualquier otro múltiplo de 900 y decir que ese es el número c, sin que se agregue ninguno nuevo a la lista de múltiplos. Por ejemplo c = 99900. Este valor sólo tiene un múltiplo, él mismo, del 1 al 100000 (de hecho, hay 56 números, de los de esa lista, que sólo tienen un múltiplo).

De esta manera**, una solución es: *a* = 900, *b* = 1800 y *c* = 99900**.

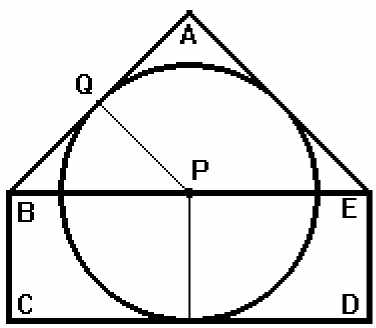
Por el método anterior, hay 5995 soluciones distintas para encontrar a, b y c, ¡pero no son todas! En efecto, quizá alguien decidió que sólo dos de los números pedidos tuviesen múltiplos comunes (en el sentido del método anterior y como está en el ejemplo) y el tercero no, pero entre los tres dieran los 111. Por ejemplo, que hubiese 109 por un lado y 2 por otro:

100000 / 109 = 917 (ya dijimos que no se necesitan los decimales.)

917 x 1 = 917
917 x 2 = 1834
917 x 3 = 2751
.
.
.
917 x 108 = 99036
917 x 109 = 99953

El siguiente múltiplo, 917 x 110 = 100870, ya no pertenece a los números del 1 al 100000. Así, podríamos proponer que a = 917 y b = 99953. Por último, escojamos un número del que sólo haya dos múltiplos, del 1 al 100000; hay muchos números que cumplen con eso, exactamente hay 16667 (del 33334 al 50000), pero debemos escoger uno que no sea divisible entre 917 para que no tenga algún múltiplo en común con los anteriores. Por ejemplo, c puede ser 49999 ó 50000.

Como puede verse, por este método hay más soluciones que por el anterior. Además, hay otros métodos que también dan muchas soluciones. Sólo se pedía una solución de los miles que hay...



Problema 2: Sea P el centro de la circunferencia, Q el un punto en AB tal que PQ es perpendicular a AB y **r** el radio de la circunferencia.

Observación 1: La altura del rectángulo BCDE coincide con el radio de la circunferencia.

Observación 2: Como el triángulo BAE es rectángulo e isósceles, también triángulo BPQ es rectángulo e isósceles entonces, por el teorema de Pitágoras: $BP^2=PQ^2+QB^2=\mathbf{r}^2+\mathbf{r}^2=2\mathbf{r}^2$, por lo que BP= $\sqrt{2}\,\mathbf{r}$.

Por lo anterior, al ser BP la mitad de BE, la base del rectángulo es $2\sqrt{2}\,\mathbf{r}$, y utilizando la Observación 1, el área del rectángulo es $2\sqrt{2}\,\mathbf{r}^2$.

Por otra parte, el área del triángulo ABP es $(\sqrt{2}\,\mathbf{r})^2 / 2 = \mathbf{r}^2$, y como el área del triángulo ABP es la mitad de la del triángulo ABE, entonces el área de ABE es $2\mathbf{r}^2$.

Área(ABCDE) = Área(BCDE) + Área(ABE) = $2\sqrt{2}\,\mathbf{r}^2 + 2\mathbf{r}^2 = 2(\sqrt{2}+1)\,\mathbf{r}^2 = 2005$. De aquí, al despejar, tenemos que $\mathbf{r}^2 = \dfrac{2005}{2(\sqrt{2}+1)}$.

Por último, el área del círculo es: $\pi\mathbf{r}^2 = \dfrac{2005\pi}{2(\sqrt{2}+1)}$

Problema 3: La **I** se usa una vez en los números que terminan en 1, 4, 6 y 9, dos veces para los terminados en 2 y 7, y tres veces en los terminados en 3 y 8, por lo cual cada diez números la **I** se utiliza 14 veces. Por lo cual del 1 al 2000 se usa 2800 veces. Además, vemos que del 2001 al 2005 se usa 1 + 2 + 3 + 1 = 7 veces. Por tanto, del 1 al 2005, la **I** se utiliza en total 2807 ocasiones.

La **V** solamente se utiliza una vez en los números terminados en 4, 5, 6, 7 y 8, cinco veces cada decena, por lo cual del 1 al 2000 se usa 1000 veces. Además, del 2001 al 2005 se usa dos veces; por lo tanto, del 1 al 2005, la **V** se utiliza en total 1002 veces.

La **X** se usa una vez en los números cuya cifra de las decenas es 1, 4, 6 ó 9, dos veces si es 2 ó 7 y tres veces si es 3 u 8; lo que da 140 veces en una centena. Además, si un número termina en 9 se usa una vez más en cada decena, esto es 10 en una centena. Por lo cual, cada cien números, la **X** se utiliza 150 veces; es decir, del 1 al 2000, la **X** se usa 3000 veces.

La **L** se usa una vez en los números cuya cifra de las decenas es 4, 5, 6, 7 u 8. Por esta razón, cada cien números, la **L** se utiliza en 500 ocasiones, por lo que del 1 al 2000 se usa 1000 veces.

La **C** se usa una vez en los números cuya cifra de las centenas es 1, 4, 6 ó 9, dos veces si es 2 ó 7 y tres veces si es 3 u 8; esto da 1400 veces en un millar. Además se usa una vez en los números cuya cifra de las decenas es 9, esto es 100 más en un millar. Por lo cual, cada mil números, la **C** se utiliza 1500 veces; es decir, del 1 al 2000, la **C** se utiliza 3000 veces.

La **D** se usa una vez en los números cuya cifra de las centenas es 4, 5, 6, 7, 8. Por lo cual, cada mil números, la **D** se utiliza en 500 ocasiones, por lo que, del 1 al 2000, se utiliza 1000 veces.

La **M** se usa una vez del 900 al 999, ahí hay 100; también se usa una vez del 1000 a 1899, ahí hay 900 más; del 1900 al 1999, se usa dos veces en cada número, lo que da 200 más; por último, también se usa dos veces en cada número del 2000 al 2005, esto es otras 12 veces. Así, en total, la **M** se usa en total 1212 veces.

Problema 4: Sea L el volumen medido en litros del barril. Después del primer día tenemos L-1 litros de vino en el barril. Al segundo día extraemos del barril $\frac{L-1}{L}$ litros de vino, quedando entonces:

$L-1-\frac{L-1}{L}=\frac{L(L-1)-(L-1)}{L}=\frac{(L-1)(L-1)}{L}=\frac{(L-1)^2}{L}$ litros de vino en el barril en el segundo día.

Al tercer día se extraerá del barril $\frac{(L-1)^2}{L^2}$ litros de vino quedando entonces

$\frac{(L-1)^2}{L}-\frac{(L-1)^2}{L^2}=\frac{L(L-1)^2-(L-1)^2}{L^2}=\frac{(L-1)^3}{L^2}$ litros de vino, pero por hipótesis, esto es igual a un octavo de vino de lo que había antes: $\frac{(L-1)^3}{L^2}=\frac{L}{8}$. Para despejar, primero pasamos L^2 al miembro derecho, lo que nos da cubos en ambos miembros.

Extraemos la raíz cúbica y obtenemos: $L-1=\frac{L}{2}$.

Por último, de esta ecuación despejamos a L y obtenemos que L = 2 litros