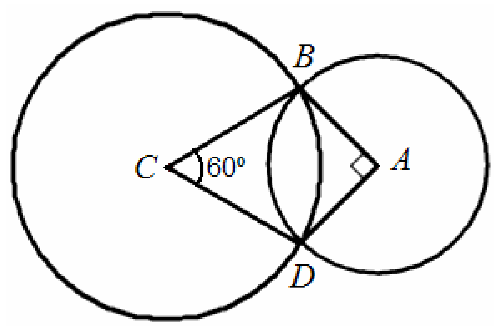
SEMIFINAL, 7 de Junio de 2008

PROBLEMAS

1. Dos círculos que tienen sus centros en los puntos A y C se intersectan en los puntos B y D. El ángulo BAD mide 90º, el ángulo DCB mide 60º, y la distancia BD mide un metro. ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero $ABCD$?



2. Para codificar un mensaje *m*, se hace un proceso a cada palabra que consiste de los siguientes pasos:

Paso 1: Si la cantidad de letras en el mensaje es 1, la palabra se deja igual, en caso contrario, ir al Paso 2.

Paso 2: Voltea el orden de las letras en la palabra y haz el paso siguiente.

Paso 3: Parte la palabra a la mitad; en caso de que la palabra tenga una cantidad impar de letras, la primera mitad se quedará con una letra más. A la primera mitad le llamaremos A y a la segunda B. Ve al paso siguiente.

Paso 4: Con la palabra A, ve al paso 1. Con la palabra B, ve al paso 1.

El proceso termina cuando todas las palabras resultantes quedan con una sola letra.

Ejemplo:

<table>
<tr><td colspan="9" align="center">OLIMPIADA</td></tr>
<tr><td colspan="9" align="center">ADAIPMILO</td></tr>
<tr><td colspan="5" align="center">ADAIP</td><td colspan="4" align="center">MILO</td></tr>
<tr><td colspan="5" align="center">PIADA</td><td colspan="4" align="center">OLIM</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">PIA</td><td colspan="2" align="center">DA</td><td colspan="2" align="center">OL</td><td colspan="2" align="center">IM</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">AIP</td><td colspan="2" align="center">AD</td><td colspan="2" align="center">LO</td><td colspan="2" align="center">MI</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">AI</td><td>P</td><td>A</td><td>D</td><td>L</td><td>O</td><td>M</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">IA</td><td>P</td><td>A</td><td>D</td><td>L</td><td>O</td><td>M</td><td>I</td></tr>
<tr><td>I</td><td>A</td><td>P</td><td>A</td><td>D</td><td>L</td><td>O</td><td>M</td><td>I</td></tr>
</table>

Usando lo anterior, contesta lo siguiente:

a) Si tenemos una palabra de 30 letras, ¿en qué lugar quedará la letra que ocupa en un principio el lugar 8?

b) Si tenemos una palabra de 2008 letras, ¿cuántas veces se tiene que dividir esta palabra para terminar el proceso?

3. Llamemos $P(n)$ al producto de la cifras de un número n, por ejemplo, cuando $n = 385$, $P(n) = P(385) = 3x8x5 = 120$.

Un número n se llama "Picudo" si $P(n)$ no es cero y el número n es múltiplo de $P(n)$. Por ejemplo, el 36 es un número "Picudo" ya que es múltiplo de $P(36) = 3x6 = 18$.

A un número n se le dice "Picudísimo" si tanto n como n + 1 son "Picudos".

¿Cuántos números "Picudísimos" de 2008 cifras existen?

4. Decimos que un número n es *triangular* si podemos escribirlo como la suma de los primeros k números naturales, es decir, de la siguiente forma:

$$n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (k-2) + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(NOTA: Los puntos suspensivos indican que la suma continúa de la misma manera.)

Por ejemplo, los primeros cinco números triangulares son:

1 = 1, **3** = 1 + 2, **6** = 1 + 2 + 3, **10** = 1 + 2 + 3 + 4 y **15** = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,

y el que ocupa el décimo lugar es **55** = 1 + 2 + 3 +...+ 8 + 9 + 10.

Demuestra que si n es un número triangular, entonces también el número $9n$ +1 es triangular.