

18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

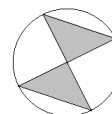
Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes
ELIMINATORIA



1) ¿Cuál es el mínimo entero positivo que al multiplicarlo con 126, el resultado es un cuadrado perfecto, es decir, tiene raíz cuadrada exacta?

- A) 14 B) 126 C) 48 D) 36 E) 56

2) En la figura de la derecha los dos triángulos son rectángulos y tienen como vértice común el centro del círculo de radio r . El área de la región **NO** sombreada es:



- A) $\frac{\pi r^2}{2}$ B) $\frac{\pi r^2}{3}$ C) $\pi r^2 - r^2$ D) $\pi r^2 - 2r^2$ E) Ninguna de las anteriores.

3) Señala la afirmación que es FALSA.

Es posible acomodar a un cubo opaco para que la proyección de su sombra sea un

- A) hexágono. B) cuadrado. C) rectángulo. D) rombo. E) triángulo.

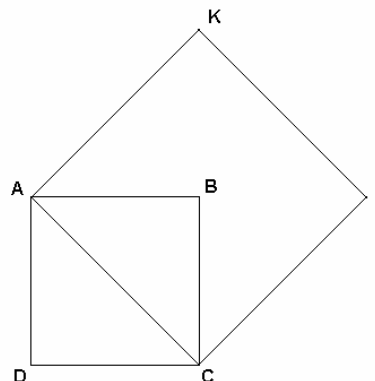
4) ¿Cuántos números enteros positivos, menores que 2004 existen, tales que el producto de sus dígitos es 30?

- A) 16 B) 30 C) 26 D) 24 E) 20

5) Cada lado del cuadrado ABCD mide 1 metro.

¿Cuál es el área del cuadrado AKPC?

- A) 1 m^2
B) 1.5 m^2
C) 2 m^2
D) 2.5 m^2
E) 3 m^2



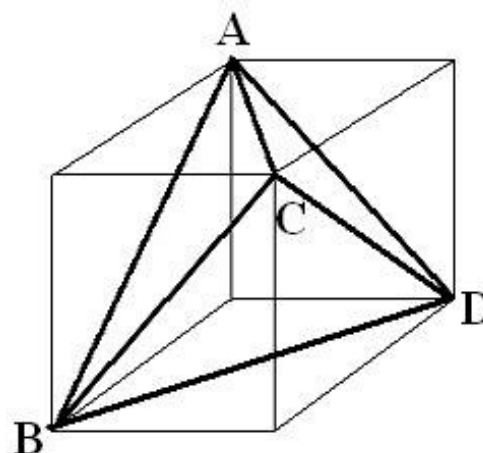
6) Jorge Emilio pide tres millones de “panchólares”, en billetes de 20 “panchólares”, y acomoda un billete sobre otro. Suponiendo que el grosor de cada billete sea de una décima de milímetro, ¿qué altura tendrá un fajo de billetes con esa cantidad?

- A) 300 metros B) 150 metros C) 300 centímetros
D) 15 metros. E) 150 centímetros.

7) El número 2004 tiene dos cifras iguales a cero. ¿Cuántos números, del 1 al 2004, tienen exactamente dos ceros (la primera cifra diferente de cero, es decir, 001 no es válido ya que es el número 1)

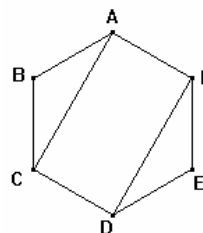
- A) Menos de 27 B) 27 C) 33 D) 39 E) Más de 39

8) El cubo de la figura tiene 10 centímetros de arista; el tetraedro regular está inscrito en él, de tal manera que sus cuatro vértices (puntos A, B, C y D) coinciden con cuatro de los ocho vértices del cubo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?



- A) El volumen del tetraedro es la tercera parte del volumen del cubo.
 B) Hay otro tetraedro regular cuyos vértices son los otros cuatro vértices del cubo que no son A, B, C ni D.
 C) El volumen del tetraedro es $333\frac{1}{3} \text{ cm}^3$.
 D) El área del cubo es el triple que la del tetraedro.
 E) La arista del tetraedro mide entre 14.14 y 14.15 centímetros

9) Cada lado del siguiente polígono regular mide L, ¿cuál es el área del rectángulo ACDF?



- A) Los datos no son suficientes.
 B) $\sqrt{3}L^2$
 C) $3L$
 D) $3L^2$
 E) Ninguna de las anteriores.

10) La suma de los cuadrados de dos números es X y el producto de dichos números es Y; entonces, el cuadrado de su suma es:

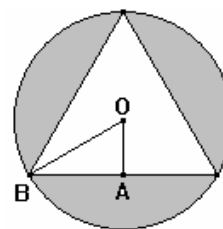
- A) Los datos no son suficientes. B) $X+2Y$. C) $2X+2Y$. D) $2X+Y$.
 E) Ninguna de las anteriores.

11) Se tienen dos cajas cúbicas de dimensiones iguales. Una de las cajas contiene una esfera de acero cuyo diámetro es igual a la altura de la caja. La otra caja tiene esferas de acero cuyo diámetro es la octava parte de la altura de la caja. ¿Cuántas esferas de acero contiene esta última, si el peso de ambas cajas es el mismo?

- A) 8 B) 24 C) 32 D) 64 E) 512

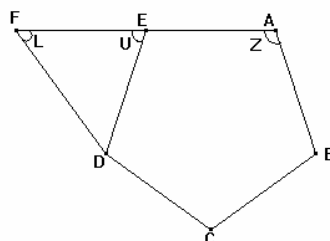
12) Los segmentos que forman el triángulo son congruentes. Si $OB=2$ y OA es la mitad de lo que mide OB , determinar el área sombreada.

- A) $4\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $4\pi - 3\sqrt{3}$ C) $2\pi - 3$ D) $2\pi - \sqrt{3}$
 E) $4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$



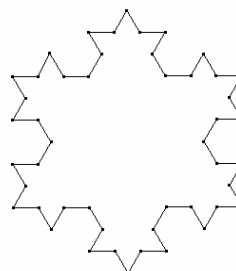
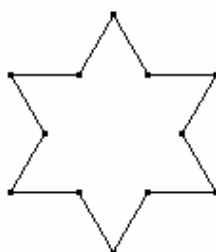
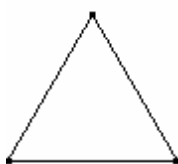
13) La figura ABCDE es un pentágono regular. A, E y F están en la misma línea y además la longitud de EF y la de AE son iguales. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos $L+U+Z$?

- A) 45°
 B) 270°
 C) 216°
 D) 180°
 E) 234°

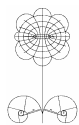


14) ¿Cuántas cifras son necesarias para escribir todos los números del 1 al 2004?
 A) 2004 B) 7000 C) 6909 D) 9999 E) Ninguna de las anteriores

15) Considera la sucesión de las siguientes figuras: La primera tiene 3 picos, la segunda 6 y la tercera 18 picos, ¿cuántos picos tendrá la quinta?



- A) 333 B) 258 C) 384 D) 768 E) 66



18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

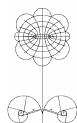
Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

ELIMINATORIA

RESPUESTAS



1	<input checked="" type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
2	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
3	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E
4	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
5	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
6	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input checked="" type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
7	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E
8	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input checked="" type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
9	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
10	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
11	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E
12	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
13	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/> E
14	<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
15	<input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/> B	<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E



18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Primera Etapa: Concurso Regional, Aguascalientes

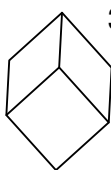
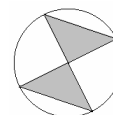
ELIMINATORIA

SOLUCIONES



- 1) A) $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, para que sea un cuadrado perfecto deberían ser factores al cuadrado, para ello debe multiplicarse por $2 \times 7 = 14$.

- 2) C) Cada cateto mide r , por lo cual el área de cada triángulo es $r^2/2$. El área del círculo es πr^2 . Entonces el área de la región no sombreada es $\pi r^2 - 2(r^2/2) = \pi r^2 - r^2$.

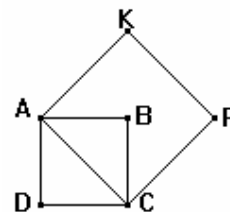


- 3) E) La sombra de un cubo puede ser un cuadrado, como un cuadrado es rombo y rectángulo, también su sombra puede ser un rombo y un rectángulo. También su sombra puede ser un hexágono, ver la figura. Por lo tanto la única proposición que puede ser falsa es que la sombra de un cubo sea un triángulo

- 4) C) $30 = 2 \times 3 \times 5$. Números de dos cifras cuyo producto sea 30 sólo hay dos: 56 y 65. Con tres cifras pueden ser todos los que tengan las cifras 1, 5 y 6 o 2, 3 y 5, doce en total. Con cuatro cifras, como deben ser menores de 2004, deben comenzar con 1, entonces sus cifras deben de ser 1, 1, 5 y 6 o 1, 2, 3 y 5, doce en total. Por lo tanto números que cumplan las características pedidas son:

$$2 + 12 + 12 = 26.$$

- 5) C) La diagonal del cuadrado ABCD mide $\sqrt{2}$, y es la medida de cada uno de los lados del cuadrado AKPC, por lo que su área es $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

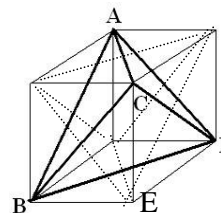


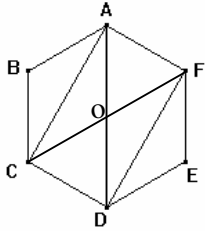
- 6) D) La cantidad de billetes que se tiene es $\frac{3000000}{20} = 150000$

Como cada billete tiene un grosor de 0.1 mm. La altura que alcanzarán será de $150000 \times 0.1 \text{ mm} = 15000 \text{ mm} = 15 \text{ metros}$.

- 7) E) Los números pueden ser de la siguientes formas: N00, 100N, 10N0, 1N00, 200M, donde N puede ser un número del 1 al 9, y M un número del 1 al 4, por lo tanto son $9 \times 4 + 4 = 40$.

- 8) D) Cada arista del tetraedro mide $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$, que es aproximadamente 14.142, entonces la proposición E) es verdadera. El volumen del tetraedro lo podemos obtener calculando el volumen del cubo y luego restando 4 veces el volumen de la pirámide BCDE: $10^3 - 4(10^3/6) = 10^3/3 = 333\frac{1}{3}$, por lo tanto la proposición A y C son verdaderas. En la figura se muestra el tetraedro usando los otros vértices por lo cuál la proposición B es verdadera Si se calcula el área del tetraedro se comprueba que la proposición D es falsa.





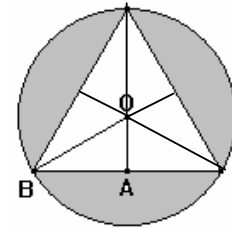
- 9) B) Trazamos las diagonales AD y CF, y llamamos o al punto de intersección de éstas. Los triángulos DoC y AoF son triángulos equiláteros por lo que $CD = Do = oA = L$, entonces la diagonal $AD = 2L$. Usando el teorema de Pitágoras obtenemos: $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{(2L)^2 - L^2} = \sqrt{3}L$, concluyendo, el área del rectángulo ACDF es $\sqrt{3}L^2$.

- 10) B) Por hipótesis $a^2 + b^2 = X$ y $ab = Y$.

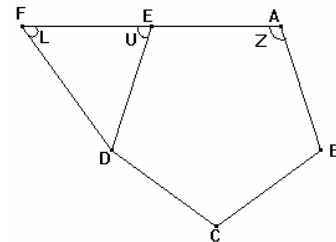
Entonces $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2(ab) = X + 2Y$.

- 11) E) Supongamos que la esfera de la primera tiene un volumen de $\frac{4\pi}{3}r^3$, si suponemos que hay k esferas en las siguientes, tenemos que el volumen de la segunda caja será: $\frac{4\pi k}{3}\left(\frac{r}{8}\right)^3 = \frac{\pi k r^3}{384}$, como las dos cajas pesan lo mismo, igualando las dos ecuaciones y despejando a k obtenemos que $k = 512$.

- 12) B) Como $OB=2$ y $OA=1$, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABO obtenemos que $AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, por lo cual el área del triángulo ABO es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Seis triángulos congruentes a ABO forman todo el triángulo de fondo blanco, por que el área pedida es: $\pi(2)^2 - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi - 3\sqrt{3}$



- 13) E) Como es un pentágono regular, el ángulo $AED=Z$, entonces $U+Z=180^\circ$, Además $Z=108^\circ$, por lo tanto $U=72^\circ$. $FE=ED$, por lo que el triángulo DEF es isósceles. Entonces $2L+U=180^\circ$, Despejando a L obtenemos $L=54^\circ$. De lo anterior podemos concluir que $L+U+Z=54^\circ+180^\circ=234^\circ$



- 14) C) Del 1 al 9 se necesitan 9, del 10 al 99 se necesitan $90 \times 2 = 180$, del 100 al 999 se necesitan $900 \times 3 = 2700$, y del 1000 al 2004 se necesitan $1005 \times 4 = 4020$, entonces en total son:

$$9 + 180 + 2700 + 4020 = 6909.$$

- 15) B) Cada lado de una figura de la sucesión se convierte en 4 lados para formar la siguiente figura, y por cada lado que tenga una figura, la que le siga tendrá un pico nuevo. Así, la segunda figura tiene $3 \times 4 = 12$ lados y 3 picos nuevos con los cuales tenemos un total de 6 picos. La tercera figura tiene $12 \times 4 = 48$ lados y por cada lado de la figura anterior un nuevo pico, que sumados con los de la figura anterior da un total de 18 picos. La cuarta figura tiene $48 \times 4 = 192$ lados y por cada lado de la figura anterior un pico nuevo, que sumado a los de la figura anterior da un total de 66 picos. Finalmente, la quinta figura tiene los 66 picos de la cuarta más 192 nuevos picos, en total 258.