Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2mil7

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

ELIMINATORIA, 14 de abril de 2007

PROBLEMAS

1) Un número positivo tiene la propiedad de que su doble es una unidad más grande que él, ¿cuántos divisores positivos tiene?

a) 1 b) 2 c) 3 d) No se puede determinar e) Ninguna de las anteriores

2) Se quiere rellenar una cuadrícula de 4x4 celdas dividida en cuatro subcuadrículas de 2x2 con los números del 1 al 4, partiendo de los números ya dispuestos en algunas celdas. No se debe repetir ninguna cifra en una misma columna, renglón o subcuadrícula. ¿Cuánto suman los valores que corresponden a las esquinas marcadas con “x”?

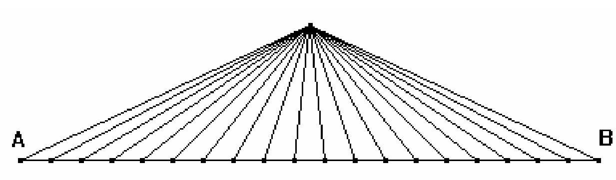
a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

2			x
3	4		
		4	
x	2	1	

3) Se tienen 12 urnas para depositar 2007 semillas, de la siguiente forma: en la urna 1 una semilla; en la urna 2, dos semillas; en la urna 3, tres semillas; y así sucesivamente, hasta que en la urna 12 se depositen doce semillas. Después se debe hacer lo mismo pero en orden inverso, es decir: en la urna 12 se pone una semilla; en la urna 11 dos semillas; en la urna 10 tres semillas; y así sucesivamente, hasta que en la urna 1 se ponen doce semillas. Se debe repetir el mismo proceso hasta que se le acaben las 2007 semillas o ya no se puedan depositar las semillas debidas en la urna correspondiente. ¿Cuántas urnas tienen la misma cantidad de semillas?

a) Todas tienen diferente cantidad
b) 2 urnas
c) 4 urnas
d) 5 urnas
e) Ninguna de las anteriores

4) En la siguiente figura se muestra la forma en que están unidas 21 ciudades mediante carreteras (20 sobre recta y una fuera de ella).



¿Cuántos caminos posibles hay de A hasta B si no puedes pasar dos veces por una misma ciudad?

a) 1 b) 2 c) 20 d) 21 e) Ninguna de las anteriores

5) ¿Cuántos números enteros positivos menores o iguales a 2007 existen, tales que la suma de sus cifras sea 9?

a) 223 b) 101 c) 55 d) 45 e) Ninguna de las anteriores

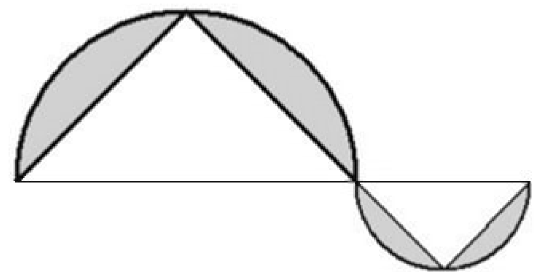
6) ¿Cuál es la suma de los dígitos de $10^{2007} - 21$?

a) 18052 b) 18061 c) 18070 d) 18079 e) Ninguna de las anteriores.

7) Si la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 2000, ambos números son:

a) Menores que 100
b) Menores que 1000, pero mayores que 99
c) Menores que 10000, pero mayores que 999
d) Menores que 100000, pero mayores que 9999
e) Ninguna de las anteriores

8) Si el radio r del semicírculo menor es la mitad del radio del semicírculo mayor, determina la superficie del área sombreada sobre los triángulos isósceles.



a) $\frac{5(\pi-2)}{2}r^2$

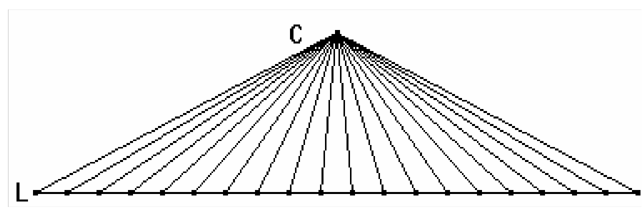
b) $\frac{5(\pi-1)}{2}r^2$

c) $5(\pi-2)r^2$

d) $5(\pi-1)r^2$

e) Ninguna de las anteriores

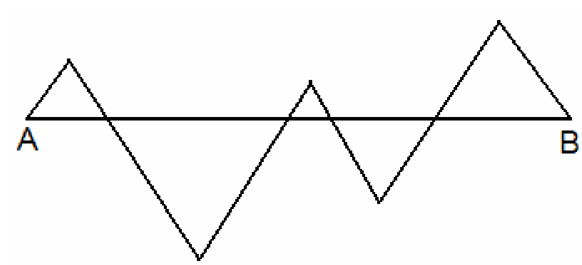
9) En la siguiente figura, del punto C a la recta L hay 20 segmentos.



¿Cuántos triángulos hay?

a) 190
b) 420
c) 1140
d) 1330
e) Ninguna de las anteriores

10) La siguiente figura esta formada por triángulos equiláteros. El segmento AB, formado por las bases de estos triángulos, mide 30 *cm*.



¿Cuánto mide el perímetro de la figura formada por los triángulos?

a) 60 *cm*
b) 90 *cm*
c) 120 *cm*
d) 150 *cm*
e) 180 *cm*

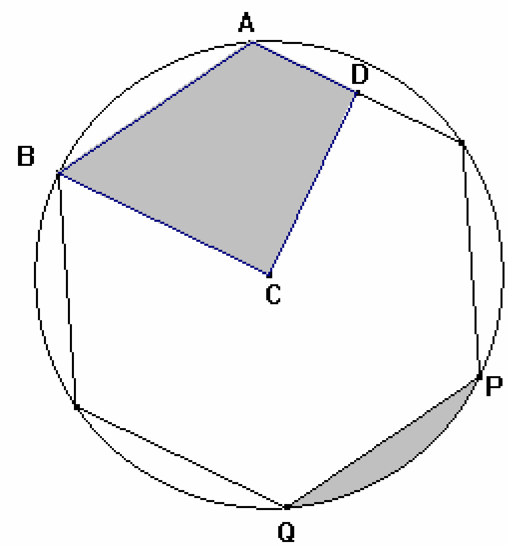
11) ¿Cuál es la suma de los dígitos de $21 \times (1+10+10^2+10^3+...+10^{2007})$?

a) 6018 b) 6021 c) 6024 d) 6027 e) Ninguna de las anteriores.

12) Si $\frac{3a}{a+3} = \frac{12}{5}$ entonces $\frac{3a+6}{a+9}$ es igual a:

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{18}{14}$ c) $\frac{18}{11}$ d) $\frac{42}{21}$ e) Ninguna de las anteriores

13) En la siguiente figura se presenta un hexágono regular inscrito en un círculo. El punto D es el punto medio del lado. Sabemos que el área del cuadrilátero ABCD es M, y el área del segmento circular que se encuentra entre el lado PQ y el círculo es N. ¿Cuál es el área del círculo?



a) $\pi(\frac{M}{4}+N)$

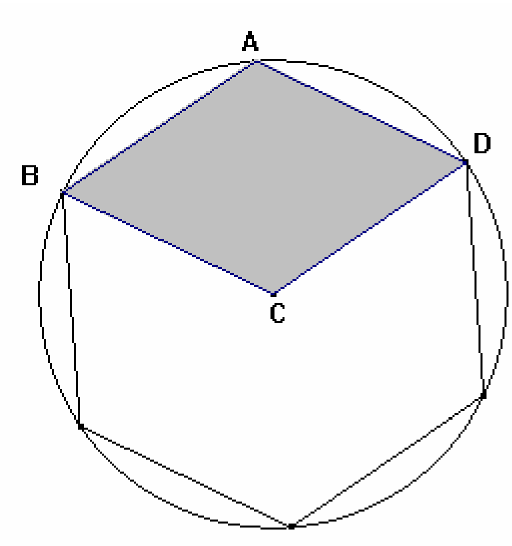
b) $4\cdot M+6\cdot N$

c) $\pi\left(\frac{M}{3}+\frac{N}{2}\right)^2$

d) Faltan datos

e) Ninguna de las anteriores

14) En la siguiente figura hay un hexágono regular inscrito en un círculo. El punto C es el centro de círculo. Sabemos que el perímetro de la circunferencia es 21π. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero ABCD?



a)21

b) 42

c) $\left(\frac{21}{2}\right)^2$

d) Faltan datos

e) Ninguna de las anteriores

15) Dos mujeres, María y Tania, y dos hombres, Juan y David, son deportistas. Una de estas personas practica natación, otra el taekwondo, otra la gimnasia y la otra el atletismo. Un día se reunieron y se sentaron alrededor de una mesa cuadrada:

1. Quien practica la natación estaba a la izquierda de María
2. Quien practica la gimnasia estaba frente a Juan
3. Tania y David se sentaron juntos
4. Una mujer se sentó al lado de quien practica taekwondo

¿Cuál de estas personas practica el atletismo?

a) María b) Tania c) Juan d) David c) La información es insuficiente

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2mil7

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

ELIMINATORIA, 14 de abril de 2007

SOLUCIONES

1) (Opción a.) La expresión del enunciado se escribe como $2a = a + 1$, despejando obtenemos $a = 1$. La cantidad de divisores del 1 es 1.

2) (Opción a.) No se requiere resolver todo el sudoku (así se llama a este tipo de juegos) para saber qué números van en las esquinas señaladas. En la esquina superior del primer renglón, debe ir un 4, pues la primera columna está ocupada y la segunda y tercera columnas ya tienen un 4; así, la cuarta columna debe tener un cuatro. Enseguida, vemos que falta un cuatro en la primera columna y el cuarto renglón, pues los demás (columnas y renglones) ya lo tienen.

2	1	3	**4** x
3	4	2	1
1	3	4	2
x **4**	2	1	3

3) (Opción e.) Para darnos una mejor idea de cómo se distribuyen las semillas, hagamos un ciclo completo:

URNA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Semillas “de ida”	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Semillas “de vuelta”	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Después de dar una “vuelta completa” cada urna tiene 13 semillas, y se han depositado en total $13 \times 12 = 156$ semillas. La parte entera de la división $\frac{2007}{156}$, $\left\lfloor \frac{2007}{156} \right\rfloor = 12$, da la cantidad de “vueltas completas” que se pueden hacer antes de que se acaben las semillas, por lo cual después de 12 vueltas quedarán sólo 135 semillas ($2007 - 12 \times 156 = 135$) que alcanzan para el viaje “de ida”, pero no para el “de vuelta” completo. Es decir, si ponemos en las urnas $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$, quedan todavía 57 semillas, lo cual alcanza para depositar $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$ semillas en las urnas de la 12 a la 3, la cuales tendrán la misma cantidad de semillas, por lo tanto 10 urnas quedarán con la misma cantidad de semillas.

4) (Opción e.) Llamémosle C a la ciudad que está fuera de segmento que une a las ciudades A y B.

Para ir de la ciudad A a la ciudad B tenemos dos opciones: pasar por C o no pasar por C. Si no pasamos por C sólo hay una forma de ir desde A hasta B.

Analicemos ahora el caso si pasamos por la ciudad C: Antes de pasar por C debemos estar en una ciudad X que esté en segmento de recta que une a A con B, igualmente, después de pasar por C debemos estar en una ciudad Y (con Y después que X en la ruta AB) que esté en segmento de recta que une a A con B. Como sólo podemos pasar una sola vez por C, solamente hay una forma de llegar de A hasta X, y por la misma razón sólo hay una manera de llegar de Y a B. Por lo tanto, la cantidad de caminos de A hasta B pasando por C, es igual a la cantidad de formas que hay de escoger dos, de las 20, ciudades que están en el segmento que une a la ciudad A con la B. Si a estas 20 ciudades las enumeraremos como 1, 2, 3,…, 19 y 20 tenemos que podemos escoger: 1 con 2, 1 con 3, 1 con 4, …, 1 con 20 (19 en total), 2 con 3, 2 con 4, 2 con 5, 2 con 20 (18 en total); siguiendo este procedimiento llegaríamos a que el total de caminos de A hasta B pasando por C son: 19+18+17+…3+2+1=190.

Por lo tanto, la cantidad de A hasta B son 191.

5) (Opción b.) Se pueden pensar que los números que estamos buscando son números de cuatro cifras donde la primera cifra puede ser 2, 1, ó 0.

Caso 1: Primera cifra 2. Sólo hay un número que comienza con 2, el 2007.

Para resolver los otros dos casos, observemos que la cantidad de parejas ordenadas de enteros no negativos cuya suma es k, es k+1.

Caso 2: Primera cifra 1. Estos números tienen la propiedad que las tres cifras restantes deben sumar 8, sean estas a, b y c.

a	b+c	cantidad
0	8	9
1	7	8
2	6	7
3	5	6
4	4	5
5	3	4
6	2	3
7	1	2
8	0	1
TOTAL		45

Caso 3: Los que comienzan 0: Estos números tienen la propiedad que las tres cifras restantes deben sumar 9, sean estas a, b y c.

a	b+c	cantidad
0	9	10
1	8	9
2	7	8
3	6	7
4	5	6
5	4	5
6	3	4
7	2	3
8	1	2
9	0	1
TOTAL		55

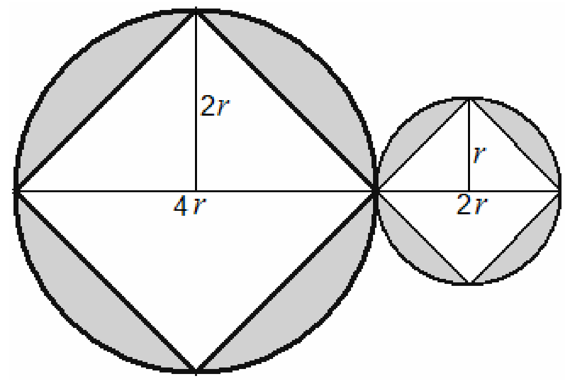
Por lo tanto en total hay 1+45+55=101 números con las características pedidas.

6) (Opción b.) $10^{2007}-21=1\underbrace{000\ldots0}_{\text{2007 ceros}}-21=\underbrace{999\ldots9}_{\text{2005 nueves}}79$, por lo cual la suma de sus cifras es

$9\times2006+7=18054+7=18061$

7) (Opción e.) El cuadrado de un número par es par, de la misma manera, el cuadrado de un número impar es impar. El problema precisa que los números son consecutivos, por tanto uno debe ser par y el otro impar. Por último, la diferencia de sus cuadrados será un número impar, que de ninguna manera podría ser 2000 pues éste es par. En otras palabras no pueden existir dos números consecutivos que cumplan lo pedido. Así, la opción correcta es “Ninguna de las anteriores”.

8) (Opción a.) El problema se comprende fácilmente cuando se completan los dos círculos. El área pedida es la mitad de la diferencia de las áreas de los círculos menos la del cuadrado, o la de un semicírculo menos el área de un triángulo que tiene de base al diámetro y de altura al radio.



Así: $\frac{\pi(2r)^2}{2}-\frac{(4r)(2r)}{2}+\frac{\pi r^2}{2}-\frac{(2r)r}{2}=$

$=\frac{4\pi r^2}{2}-\frac{8r^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}-\frac{2r^2}{2}=\frac{5\pi r^2}{2}-\frac{10r^2}{2}=$

$=\frac{5(\pi-2)}{2}r^2$

9) (Opción a.) Para formar un triángulo, uno de los vértices debe ser el vértice C. Los otros dos vértices deben estar en la recta L. Si numeramos los vértices que están sobre la recta como 1, 2, 3, 4, …, 20, entonces las parejas de vértices que podemos tomar en la recta son: 1 con 2, 1 con 3, 1 con 4, …, 1 con 20 (del 1 son 19 en total); 2 con 3, 2 con 4, 2 con 5, ..., 2 con 20 (del 2 son 18 en total, sin tomar al), siguiendo este procedimiento llegaríamos a que el total de triángulos serían: 19+18+17+…3+2+1=190.

10) (Opción b.) Cada triángulo tiene un lado (la base) sobre el segmento, y la suma de ellos debe ser la tercera parte del perímetro, el cual será de 90 centímetros.

11) (Opción c.) La cantidad que está dentro del paréntesis está formada exclusivamente de unos

$$21\times(1+10+10^2+\ldots+10^{2007})=21\times\underbrace{111\ldots1}_{\text{2008 unos}}=(20+1)\times\underbrace{111\ldots1}_{\text{2008 unos}}=$$

$$20\times\underbrace{111\ldots1}_{\text{2008 unos}}+1\times\underbrace{111\ldots1}_{\text{2008 unos}}=\underbrace{222\ldots2}_{\text{2008 doses}}0+\underbrace{111\ldots1}_{\text{2008 unos}}=2\underbrace{333\ldots3}_{\text{2007 treses}}1$$

Por lo tanto la suma de sus cifras es $2+2007\times3+1=2+6021+1=6024$.

12) (Opción d.) Si despejamos a la **a** obtenemos:

$15a=12(a+3)=12a+36$

$15a-12a=36$

$3a=36$

$a=\frac{36}{3}=12$

Por lo cual: $\frac{3a+6}{a+9}=\frac{3(12)+6}{12+9}=\frac{42}{21}$

13) (Opción b.) Si el área del cuadrilátero ABCD es M, entonces el área del triángulo ABC es $\frac{2}{3} \cdot \text{M}$ (pues el área del triángulo ABC es el doble del área del triángulo DAC). Por otra parte, el área del segmento circular que se encuentra entre el lado PQ y el círculo, es igual al área del segmento circular que se encuentra entre el lado AB y el círculo.

La suma de las áreas del triángulo ABC y del segmento circular que se encuentra entre el lado AB y el círculo, es una sexta parte del área del círculo por lo tanto el área del círculo es $6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \text{M} + \text{N} \right) = 4 \cdot \text{M} + 6 \cdot \text{N}$.

14) (Opción b.) Cada lado del cuadrilátero es igual al radio r del círculo, por lo tanto su perímetro es 4 r. Por otra parte, el perímetro del círculo es $2\pi r = 21\pi$, por lo cual $r = \frac{21}{2}$.

Por lo tanto el perímetro del cuadrilátero ABCD es $4r = 4 \times \frac{21}{2} = 42$.

15) (Opción a.) Veamos cómo se reducen las posibilidades conforme se avanza en las restricciones que el problema va planteando:

1 Quien practica la natación estaba a la izquierda de María. No importa dónde se coloquen, sólo que quien nada está a la izquierda de María.	María natación
2. Quien practica la gimnasia estaba frente a Juan. Sólo hay dos posibilidades para acomodar a quien hace gimnasia, frente a Juan.	Juan María gimnasia natación gimnasia María Juan natación
3. Tania y David se sentaron juntos. Sólo sirve la segunda opción de las dos anteriores, y genera otras dos posibilidades.	Tania gimnasia David María Juan natación David gimnasia Tania María Juan natación
4. Una mujer se sentó al lado de quien practica taekwondo. Sólo sirve la segunda opción de las dos anteriores y deja a María como la que practica el atletismo.	Tania gimnasia David taekwondo María Juan natación