Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

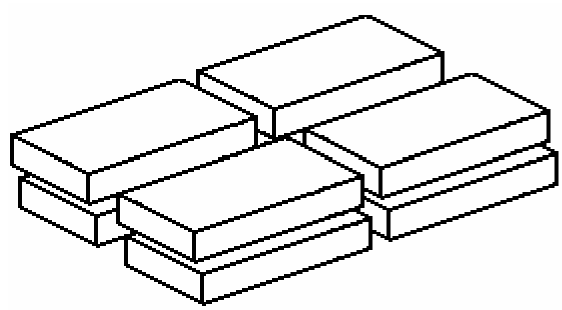
Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2mil8

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

ELIMINATORIA, 12 de abril de 2008

SOLUCIONES

1) Cuando Ivandido hizo un lingote de la mitad de dimensiones, éste sólo quedó con la octava parte del lingote original y eso fue lo que repartieron entre los dos. Por tanto a Felipillo sólo le tocó 1/16, que equivale a 6.25 %.



2) Quedan dos triángulos isósceles pues el punto medio de la hipotenusa es el centro del círculo que pasa por los tres vértices, y el radio coincidirá con los lados iguales.

3. Tienen medalla de bronce 150 concursantes, es decir, la mitad de los 300 premiados. De los restantes 150, 100 son de plata y 50 de oro.

4. El perímetro del aro es 4π (es decir, π por diámetro). El arco de 240º equivale a las dos terceras partes de la circunferencia. Así, $\frac{2}{3}(4\pi)=\frac{8\pi}{3}$.

5. Para ser divisible entre 6, tiene que ser divisible entre 2 y 3. Es decir, a puede ser 0 ó 6. Por lo tanto, hay dos números, el 3210 y el 3216.

6. Tenemos que cualesquiera tres consecutivos suman 18. Escribamos las igualdades:

De los primeros tres: 3 + B + C = 18, concluimos que B + C = 15.

De la siguiente terna: B + C + D = 18. Pero sabemos que B + C = 15, por tanto, D = 3.

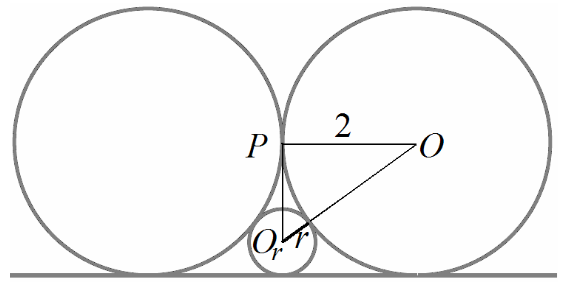
D + E + 8 = 18. Pero sabemos ya el valor de D, por ello E = 7.

E + 8 + G = 18. Pero sabemos ya el valor de E, por ello G = 3.

8 + G + H = 18. Pero sabemos ya el valor de E, por ello H = 7.

7. Supongamos que el que tiene el pelo negro es el único que está mintiendo, entonces hay dos niñas y esa afirmación no es posible. De la misma forma si el que tiene el pelo rojo es el único que está mintiendo, habría dos niños y esa afirmación tampoco es posible. Si ambos están mintiendo el que tiene el pelo negro es niña y el que tiene el pelo rojo es niño. Por lo tanto, la única afirmación que puede ser verdadera es el niño tiene el pelo rojo y la niña negro.

8. Sea r el radio de la circunferencia pequeña y sea P el punto de tangencia de las dos circunferencias de radio dos. Denotemos por O_r y O a los centros de las circunferencias pequeña y alguna de las dos circunferencias grandes, respectivamente. El triángulo OO_rP es rectángulo, por lo que podemos usar el teorema de Pitágoras para escribir



$$(2 + r)^2 = 2^2 + (2 - r)^2.$$

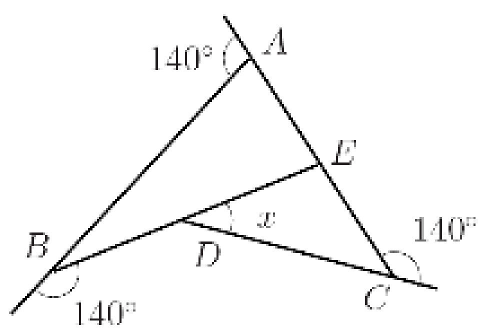
Resolviendo la ecuación tenemos que $r = 1/2$.

9. Primero observamos como son los últimos dígitos de las potencias de los números impares no divisibles entre cinco, para esto veamos la siguiente tabla, donde los números son los últimos dígitos de n y sus potencias.

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
3	9	7	1	3
7	9	3	1	7
9	1	9	1	9

Se puede observar que el último dígito se repite de cuatro en cuatro, luego, cada potencia de n, de la forma $4k$ (es decir, un múltiplo de 4) terminará en 1. Por lo tanto, para estos números, n^{100} terminará siempre en 1, al ser 100 un múltiplo de 4.

10. Alarguemos la recta BD como se muestra en la figura, y llamemos E a la nueva intersección.



Entonces

$$\angle EAB = \angle ABE = \angle DCE = 180º - 140º = 40º.$$

Si nos fijamos en le triángulo ABE, tenemos que

$$\angle BEA = 180º - (\angle EAB + \angle ABE) = 180º - 80º = 100º.$$

Por lo que

$$\angle CED = 180º - 100º = 80º$$

Finalmente nos fijamos en el triángulo EDC y tenemos que

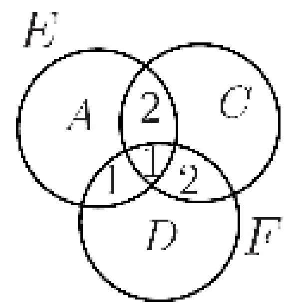
$$x = 180º - (\angle CED + \angle DCE) = 180º - 120º = 60º.$$

11. Aplicando propiedades de los exponentes, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{2^{n+4}-2(2^n)}{2(2^{n+3})} &= \frac{2^{n+4}-2^{n+1}}{2^{n+4}}\\ &= \frac{2^3\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}}{2^3\cdot 2^{n+1}}\\ &= \frac{(2^3-1)\cdot 2^{n+1}}{2^3\cdot 2^{n+1}}\\ &= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

12. Cada dos renglones ocupamos 9 números. Si llegamos hasta el número 2007, habremos rellenado 223 pares de renglones y nos sobrará un número. Por lo tanto, el número 2008 está en la columna A.

13. Hacemos el siguiente diagrama de Venn, como se muestra en la figura.



Tenemos que:

A + 2 + 1 + 1 = 6 hablan español

C + 2 + 2 + 1 = 7 hablan inglés

D + 2 + 1 + 1 = 5 hablan francés

Entonces A = 2, C = 2 y D = 1. Al sumar a todos, vemos que hay 11 personas.

14. Veamos cuántos números se pueden formar iniciando con uno de los unos. En el lugar de las unidades de millar sólo puede ir el 1; en el lugar de las centenas podemos colocar uno de los tres números restantes: 1, 2 ó 4; en el lugar de las decenas podemos colocar cualquiera de los dos números no utilizados anteriormente y finalmente, en el lugar de las unidades sólo nos queda un número que no hemos utilizado. Así, hay 1 × 3 × 2 × 1 = 6 números que inician con 1. Para el caso de los números que inician con 4 ó 2 sólo tenemos la mitad en cada caso, dado que, no es posible distinguir uno de los 1 del otro que escribamos. Por lo tanto hay 6 + 3 + 3 = 12 números distintos.

15. Como el área del círculo es πr^2, entonces $r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. El triángulo OAB, tiene la misma área que el triángulo ABC ya que tienen la misma base y la misma altura. El triángulo OAB es equilátero de lado $r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; luego, utilizando el teorema de Pitágoras, la altura es $h=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. Por lo tanto, su área es $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$