14ª OMM

Primera Prueba
30 de septiembre de 2000

PROBLEMAS

1. Demuestra que al multiplicar el 3 por si mismo 2000 veces el producto es divisible entre 9.

2. El número 144 tiene 15 divisores. Sabiendo que el número 7920 es igual a $5 \times 11 \times 144$, escribe un razonamiento para calcular cuantos divisores tiene el número 7920 (y calcúlalo).

3. Tomando en cuenta tres vértices cualesquiera de un cubo se forma un triángulo. De los 56 triángulos que pueden formarse de esta manera, ¿cuántos son equiláteros?

4. Observa las siguientes operaciones:

$$(a)^2 = a^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

   En el primer caso, el cuadrado de un monomio dio solo un término.

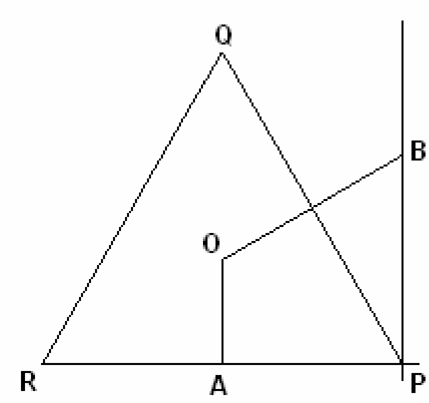
   En el segundo caso, el cuadrado de un binomio dio 3 términos, de los cuales 2 son cuadrados y sólo 1 es un doble producto; además, la suma de sus coeficientes numéricos es 4.

   En el tercero, el cuadrado de un trinomio di 6 términos, de los cuales 3 son cuadrados y 3 son dobles productos; además, la suma de los coeficientes numéricos es 9.

   En el cuarto, el cuadrado de un tetranomio dio 10 términos, de los cuales 4 son cuadrados y 6 son dobles productos; además, la suma de sus coeficientes numéricos es 16.

   Si eleváramos al cuadrado un polinomio que tuviera 100 términos (hectanomio), ¿cuántos términos tendría el resultado, y de ellos cuántos serían cuadrados y cuántos serían dobles productos? ¿Cuánto sumarían los coeficientes numéricos?

5. El triángulo equilátero ΔPQR tiene centro en **O**. Los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ forman parte de las mediatrices de los lados $\overline{RP}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente. El segmento $\overline{BP}$ es perpendicular a $\overline{RP}$. Si $\overline{OA}$ mide 10 cm., ¿cuánto mide $\overline{OB}$?

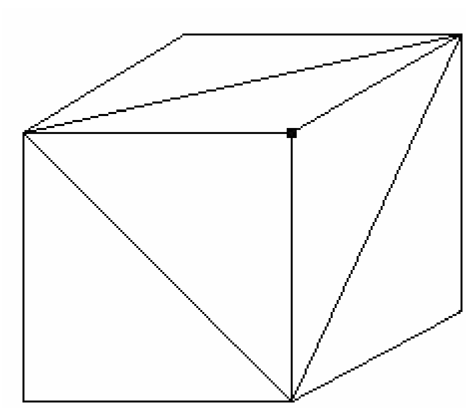


SOLUCIONES

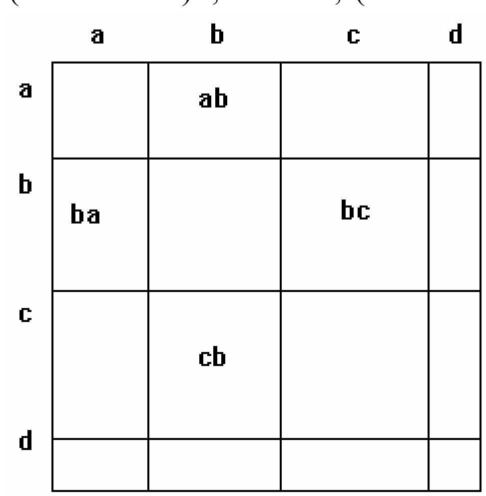
1. La operación se representa como 3^{2000}, que es igual a $3^2 \times 3^{1998}$, es decir, 9×3^{1998} que, evidentemente, es múltiplo de nueve.

2. Cualquier divisor de 144, será divisor de 7920 (que es $5 \times 11 \times 144$), y también lo será el múltiplo 5 de cualquiera de ellos; es decir, si el número **a** divide a 144, el numero **5a** dividirá a 7920. De manera similar, si el número **a** divide a 144, el numero **11a** dividirá a 7920. Como ni el 5 ni el 11 dividen a 144, tengo la opción de construir un divisor de 7920 de la siguiente manera:
   Primero escojo, o no, al 5 como factor del divisor, que da lugar a dos posibilidades;
   Después escojo o no al 11 como factor del divisor, que da lugar a otras dos posibilidades;
   Y, por último, escojo como factor del divisor a alguno de los 15 divisores de 144.
   Así, las posibilidades para construir un divisor de 7920 son $2 \times 2 \times 15$. En total sesenta.

3. Las medidas de los lados de los triángulos que se forman al tomar tres vértices de un cubo de arista 1, solamente pueden ser 1, $\sqrt{2}$, ó $\sqrt{3}$ (arista, diagonal de una cara, o diagonal del cubo, respectivamente), y sólo pueden formarse triángulos rectángulo (con lados 1, 1 y $\sqrt{2}$; o 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$) o equiláteros (con sus lados iguales a $\sqrt{2}$). Los triángulos equiláteros se forman con las diagonales de tres caras que coinciden en un vértice (sin que esas diagonales pasen por tal vértice) y habrá tantos triángulos equiláteros como vértices tenga el cubo: ocho.



4. Para que entiendas lo que sigue, conviene que mires el dibujo que representa a $(a+b+c+d)^2$, es decir, $(a+b+c+d) \times (a+b+c+d)$.



La diagonal está formada por los respectivos cuadrados: a^2, b^2, c^2 y d^2, y los doce rectángulos restantes son los productos de los términos diferentes; pero observa que siempre hay dos rectángulos iguales, aunque sólo varían en su posición (horizontal o vertical), cada par de ellos es un doble producto: $ab + ba = 2ab$, también $bc + cb = 2bc$, y así con los demás. De las 16 (cuatro por cuatro) particiones, cuatro son cuadrados y las doce restantes, acomodadas por pares, son los seis dobles productos.

En caso de tener el cuadrado de un hectanomio, el cuadrado puede representarse por 10000 (cien por cien) particiones, de las cuales 100 serán cuadrados; y con los restantes 9900 rectángulos se formarán 4950 dobles productos, por lo que habrán 5050 términos. Por otra parte, no es difícil ver que la suma de los coeficientes numéricos coincide con las particiones que están representadas, en este caso 10000.

5. Sea M la intersección de $\overline{OB}$ con $\overline{PQ}$. Por la simetría de la figura, se tiene que $\overline{OM}$ mide lo mismo que $\overline{OA}$. Por otra parte, M es el punto medio de $\overline{OB}$ pues el triángulo ΔPOB también es equilátero (ya que $\angle OPB$ mide 60º, lo mismo que $\angle MPB$). Así, $\overline{OB}$ mide el doble que $\overline{OA}$, es decir 20 centímetros.