15ª OMM

Primera Prueba
26 de mayo de 2001

PROBLEMAS

1. Tres personas (de nombres Antonio, Bernardo y Carlos, respectivamente) se sientan al azar en tres sillas. Cada silla tienen el nombre de uno de ellos (no hay dos sillas con el mismo nombre).
   a) ¿De cuántas formas es posible sentarlos sin que coincidan los nombres que tiene cada una de las sillas con el de la persona que la ocupa?
   b) ¿De cuántas formas es posible sentarlos haciendo que sólo coincida una persona (cualquiera) con la silla que ocupa su nombre?
   c) ¿De cuántas formas es posible sentarlos haciendo que sólo coincidan dos personas (cualesquiera) con las sillas que ocupan su respectivo nombre?
   d) ¿De cuántas formas es posible sentarlos haciendo que coincidan todas las personas con las sillas que ocupan sus respectivos nombres?

2. Observa que:

$$3 \times 29 \times 23 = 2001$$

$$3 \times (26+3) \times (26-3) = 2001$$

$$3 \times (26^2 - 3^2) = 2001$$

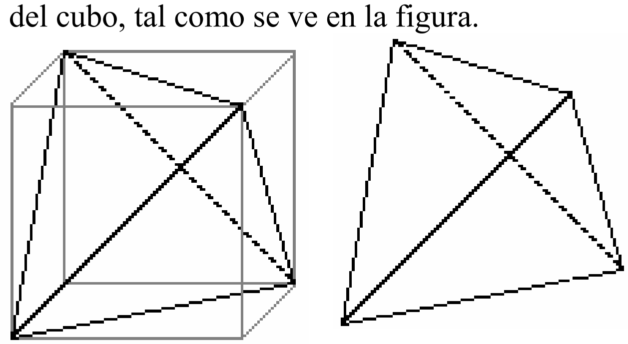
Es decir, 2001 es el triple de una diferencia de cuadrados; a saber, de 26^2 y 3^2. ¿Podrá haber otro par de números enteros positivos, además del 26 y del 3, donde 2001 sea el triple de una diferencia de cuadrados?

3. Sean ***A, V*** y ***m*** tres números enteros positivos tales que:

$A = 1 + 2 + 3 + \ldots + m$ y $V = (m-1) + (m-2) + (m-3) + \ldots + 1$

Determina para cuáles números ***m*** se cumple que **A + V** es una potencia de 2001.

4. Un Tetraedro regular, es un poliedro con cuatro caras (idénticas) que son triángulos equiláteros. Una de las propiedades del tetraedro es que puede acomodarse en el interior de un cubo, de tal forma que las aristas del tetraedro coinciden con las diagonales de cada una de las caras del cubo, tal como se ve en la figura.



Si el cubo de la figura tiene 6 decímetros de arista, ¿cuál es el volumen del tetraedro?

SOLUCIONES

1. Sabemos que en total hay seis posibilidades. Representamos a las personas con sus iniciales en mayúscula y a las sillas con las iniciales en minúscula. Así, estas posibilidades son:

$$\frac{ABC}{abc}, \frac{ACB}{abc}, \frac{BAC}{abc}, \frac{BCA}{abc}, \frac{CAB}{abc} \text{ y } \frac{CBA}{abc}$$

Observa que no importa el orden en el que estén las sillas, sino quién se sienta en cada una de ellas.

De allí es posible contestar fácilmente las preguntas que hace el problema:

a) De 2 **b)** De 3 **c)** No es posible **d)**De una

2. La pregunta se reduce a buscar, primero, dos números que den como producto lo mismo que 29 y 23, es decir, dos números que den como producto 667. Pero como 667 sólo tiene descomposición en dos factores primos (el 23 y el 29), la única posibilidad que resta es obtenerlo del producto de 667 y 1. Así, los dos números sumados darán 667 pero restados darán 1, esto significa que ellos son muy cercanos, tan cercanos que son consecutivos (y casi la mitad de 667). Tales números sólo pueden ser 333 y 334. De esta manera:

$$667 \times 1 = (334 + 333) \times (334 - 333)$$
$$667 = (334^2 - 333^2)$$
$$\text{y } 3 \times (334^2 - 333^2) = 2001$$

3. Basta con acomodar ambos números y sumarlos de la siguiente forma:

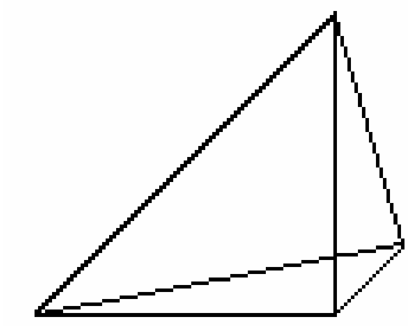
$$\begin{array}{rcccccc} A = & 1 + & 2 + & 3 + & \ldots + & (m-1) + & m \\ + & & & & & & \\ V = & (m-1) + & (m-2) + & (m-3) + & \ldots + & & 1 \\ \hline & m & +m & +m & +\ldots+m & & +m \end{array}$$

Notemos que $A + V = m^2$. Por lo tanto $\boldsymbol{A+V}$ será potencia de 2001 sólo cuando $\boldsymbol{m}$ también lo sea.

4. El cubo, que tiene 216 dm^3, puede descomponerse en 5 sólidos: el tetraedro regular señalado y cuatro pirámides congruentes.

El volumen del tetraedro regular es el volumen del cubo, menos el volumen de las cuatro pirámides (que por cierto son también tetraedros, pero no son regulares).

El volumen de una pirámide está dado por $V = \frac{Bh}{3}$ donde B es el área de la base de la pirámide y h es la altura.



En el caso de las cuatro pirámides, la base de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de 6 dm. Así, $B = \frac{6\times 6}{2} = 18\ \text{dm}^2$.

Como la altura es de 6 dm, el volumen de cada pirámide es $V = \frac{18\times 6}{3} = 36\ \text{dm}^3$.

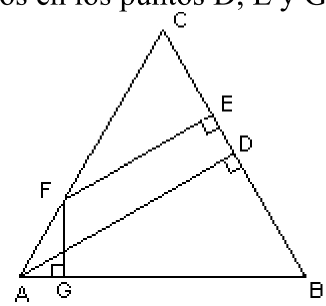
El volumen del tetraedro será: $V = 6^3 - 4\times 36 = 216 - 144 = 72\ \text{dm}^3$.

Segunda Prueba
2 de junio de 2001

PROBLEMAS

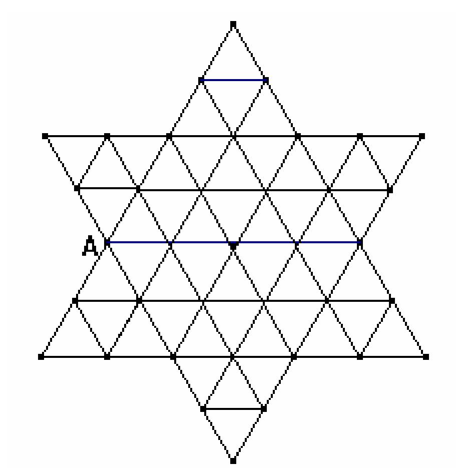
1. Acomoda a los números 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670 y 671, sin repetir, en una cuadricula de 3x3, de tal manera que la suma en cada renglón y en cada columna sea 2001, y que los números de cada diagonal sumen lo mismo.
   En caso de que esto no sea posible, explica porqué.

2. Demuestra que AD = EF + FG, con lo que se esta indicando en la siguiente figura (el triángulo ABC es equilátero; los puntos D, E, F y g están sobre los lados del triángulo, y están señalados tres ángulos rectos en los puntos D, E y G)



3. Calcula el volumen de un cubo que está inscrito en una esfera de 10 centímetros de diámetro.

4. ¿Cuántos triángulos de la figura de abajo contienen al punto A (puede ser como vértice o no)?

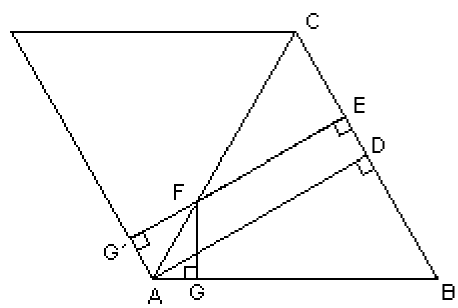


SOLUCIONES

1. Salvo rotaciones y reflexiones, sólo hay una solución:

670	665	666
663	667	671
668	669	664

2. Si dibujamos otro triángulo equilátero, reflejando el anterior sobre el lado AC, el punto G se reflejará en el punto G´, y FG´ será la prolongación de la linea EF. De esta manera, se cumple que GF = G'F y que los puntos A, G´, E y D son los vértices de un paralelogramo.

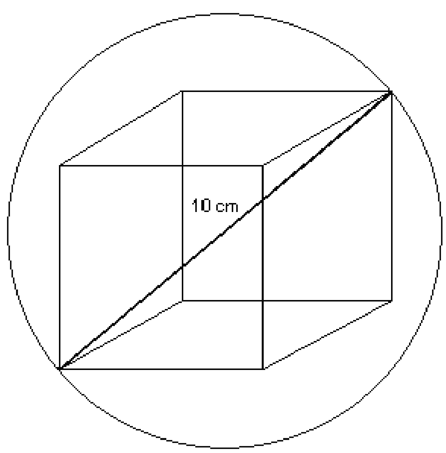


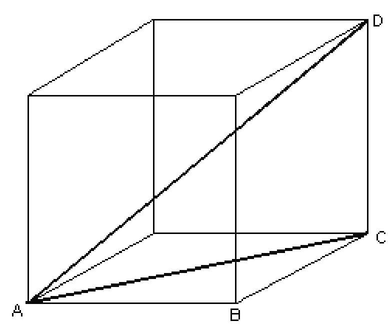
Por otra parte, los lados opuestos del rectángulo AG´ED son iguales, particularmente los lados AD y G´E.

Entonces:

AD = G´E = G´F + FE = GF + FE como se quería demostrar.

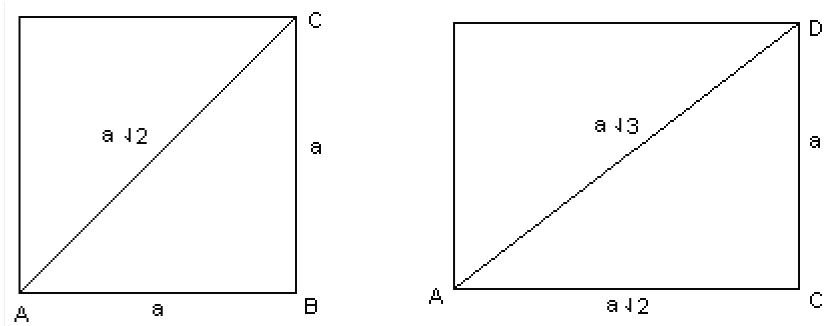
3. Lo primero que observamos es que el diámetro de la esfera coincide con la diagonal del cubo (dicha diagonal pasa por el centro del cubo, por ende pasará por el centro de la esfera). La diagonal del cubo puede calcularse a partir del lado del cubo por el teorema de Pitágoras, si nos fijamos en los lados de los triángulos rectángulos que se forman: éstos son: el triángulo ABC, con el ángulo recto en el vértice B, y el triángulo ACD, con el ángulo recto en el vértice C.





Supongamos que la arista del cubo mide **a**. Al aplicar el teorema de Pitágoras en el primer triángulo, obtenemos que la hipotenusa AC mide $a\sqrt{2}$.

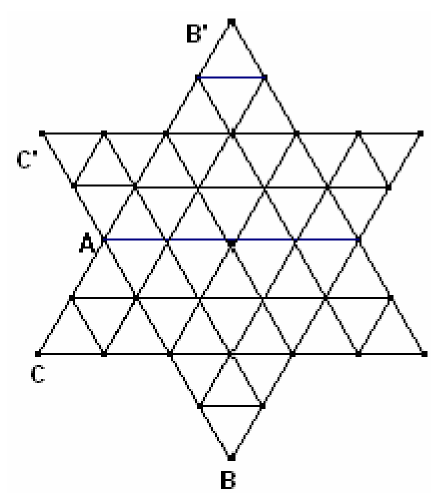
Pero este lado AC corresponde con uno de los catetos del segundo triángulo, por lo que, usando otra vez el teorema de Pitágoras, puede calcularse la hipotenusa AD del triángulo ACD (que coincide con el radio de la esfera).



Esta diagonal mide $a\sqrt{3}$. Así, podemos escribir la ecuación $a\sqrt{3}=10$ de la cual despejamos el valor de a y obtenemos $a=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

Por ultimo, sabemos que el volumen del cubo se calcula elevando al cubo su lado (es decir, de la arista a) y obtenemos que $V=\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)^3$

4. Primero observemos que para cada uno de los triángulos que tenga a uno de sus lados sobre la línea CB, hay otro sobre la línea C'B' que está en la misma situación respecto al punto A (es fácil verlo como una imagen especular, sobre la línea horizontal en el dibujo), y que cualquier triángulo que contiene al punto A esta sobre una de estas dos líneas; así, bastará contar los triángulos en la línea CB y después duplicar esa cantidad.



Atendamos el caso en q A es un vértice: hay dos puntos que pueden ser los vértices de los triángulos en la dirección hacia C, y cuatro en la dirección contraria, es decir hay 6 triángulos de éstos.

Si A no es un vértice, un vértice del triángulo será cualquiera de los dos puntos que están en la dirección hacia C, y para cada uno de éstos, podemos escoger el otro vértice de entre los 4 que están en la dirección contraria, es decir habrá 8 triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados sin ser vértice.

De esta manera, hay 14 triángulos (6+8) en la línea CB que contienen al punto A.

Para terminar, dupliquemos la cantidad de triángulos que encontramos para la recta CB y tendremos el total: 28 triángulos.

Prueba 1 de Selección
18 de agosto de 2001

PROBLEMAS

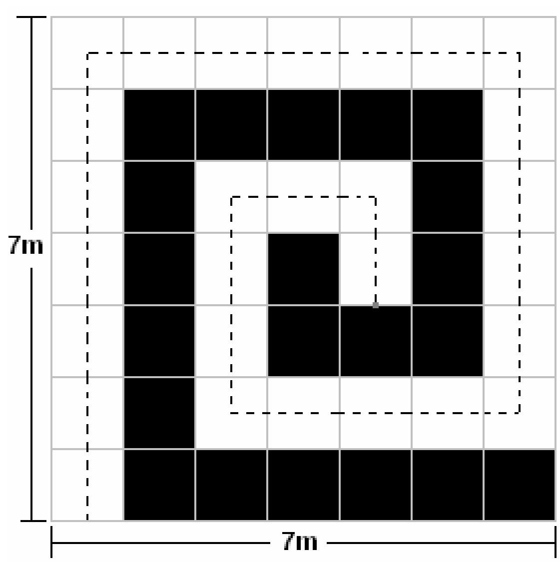
1. Demuestra que: $3\left(720^n - 30^n - 24^n + 1\right)$ es múltiplo de 2001 para todo n positivo

2. Encuentra todos los números enteros n tales que la división
$$\frac{n^2 - 2202n + 2003}{n - 2001}$$
sea un número entero.

3. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x - 1\right) = 8$?

4. Una persona siembra pasto en un terreno cuadrado de 2001m de lado, siguiendo un patrón espiral desde el centro (con lados rectos como en la figura, donde el pasto esta en color oscuro) y formando con él un camino, también de un metrote ancho cubierto de pasto, al lado queda otro camino, también de un metro de ancho, si cubrir de pasto.

   a) ¿Cuál es la superficie que está sembrada de pasto?
   b) ¿Cuánto mide la longitud del camino sin cubrir de pasto? (midiéndose por el centro del camino, desde principio a fin; por ejemplo, en la figura mide 28m)



SOLUCIONES

1. $2001 = 3 * 23 * 29$, la expresión es múltiplo de 3, así que sólo falta demostrar que es múltiplo de 23 y de 29.

$$720^n - 30^n - 24^n + 1 = 30^n 24^n - 30^n - 24^n + 1 = (30^n - 1)(24^n - 1)$$

$$30 \equiv 1 \bmod(29) \Rightarrow 30^n \equiv 1 \bmod(29) \Rightarrow 29 \mid 30^n - 1 \Rightarrow 29 \mid 720^n - 30^n - 24^n + 1$$

$$24 \equiv 1 \bmod(23) \Rightarrow 24^n \equiv 1 \bmod(23) \Rightarrow 23 \mid 24^n - 1 \Rightarrow 23 \mid 720^n - 30^n - 24^n + 1$$

Por lo cual la expresión es múltiplo de 23 y 29, por lo tanto es múltiplo de 2001.

2. $\dfrac{n^2 - 2002n + 2003}{n - 2001} = n - 1 + \dfrac{2}{n - 2001}$. Los únicos divisores de 2 son -2,-1,1 y 2 por lo cual:

$$n - 2001 = -2 \Rightarrow n = 1999$$
$$n - 2001 = -1 \Rightarrow n = 2000$$
$$n - 2001 = 1 \Rightarrow n = 2002$$
$$n - 2001 = 2 \Rightarrow n = 2003$$

3.

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 8$$
$$(x^2 + x)^2 - 1 = 8$$
$$(x^2 + x)^2 = 9$$

Al extraer la raíz cuadrada da lugar a dos posibilidades:

$$x^2 + x = \pm 3$$

Cada una de ellas da a lugar a una ecuación de segundo grado: $x^2 + x - 3 = 0$ y $x^2 + x + 3 = 0$,

de las cuales, al calcular los respectivos discriminantes (13 y -11) se observa que sólo la primera tiene dos soluciones reales, y las soluciones de la segunda ecuación son complejas.

4.

a) Si partimos desde el exterior y transitamos por el camino sin pasto, vemos que la primera “tira” tiene 2001 cuadros, la segunda 2000, la tercera 1999, y así sucesivamente hasta que la última tenga sólo 1. Al hacer un recorrido similar por el camino con pasto, la primera “tira”tiene 2000 cuadros, la segunda 1999, la tercera 1998, y así sucesivamente hasta que la última tenga sólo 1.

En resumen, si s es la superficie sembrada con pasto, $S = 2000 + 2001 + 1999 + \ldots + 1$ la cual puede calcularse fácilmente.

Otra forma de verlo es que la superficie sin sembrar es $S + 2001$, y que la suma de ambas superficies es 2001^2, lo que equivale a: $S + (S + 2001) = 2001^2$, cuya solución es 2001000.

b) La longitud pedida se corresponde a la cantidad de cuadros sin sembrar que es: $S + 2001 = 2001000 + 2001 = 2003001$

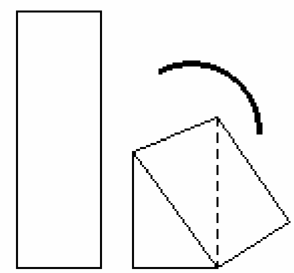
Prueba 2 de Selección
25 de Agosto de 2001

PROBLEMAS

1. Una tira de papel rectangular se dobla como indica la figura, de tal manera que dos de los vértices opuestos coincidan. Como puedes ver, el contorno de esta figura es un pentágono.

   a) Da las dimensiones (largo y ancho) de la tira para que el pentágono sea regular (ángulos y lados iguales).

   b) Da las dimensiones (largo y ancho) de la tira para que el pentágono sea equilátero (todos los lados iguales)

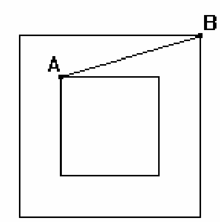


2. Los datos siguientes fueron obtenidos de la fábrica de Robots ACME:

   i) Cada robot consta de 2001 componentes.
   ii) Cada componente sólo es de la marca A o de la marca B.
   iii) Dos robots son compatibles si y solamente si tienen un y solamente un componente distinto.

   a) ¿Cuántos tipos de robot se pueden hacer?
   b) ¿A cuántos robots es compatible cada robot?
   c) ¿Cuántos tipos de parejas de robots compatibles puede haber?

3. Considera dos cuadros concéntricos cuyos lados son paralelos. Supongamos que el área del cuadrado grande es P y el del pequeño es Q. Se traza el segmento AB de longitud 3, como se muestra en la figura. Calcula P+Q.

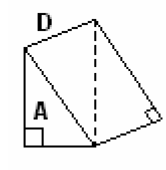


4. Se tiene cuatro colores (azul, blanco, café, y dorado). Se pintan las cuatro caras de un tetraedro regular, eligiendo al azar un color para cada cara, incluso pueden repetirse los colores(o, equivalentemente, no usarse todos los colores). ¿De cuántas maneras distintas puede quedar pintado el tetraedro? (Se consideran indistinguibles las caras antes de pintarse y no se consideran distintos dos tetraedros pintados, si mediante rotaciones se puede llegar de uno a otro).

SOLUCIONES

1.

a) Los ángulos interiores de un pentágono regular miden 108°, pero en un pentágono obtenido mediante un doblez como el propuesto siempre habrá dos ángulos rectos.



b) Tampoco es posible, pues el lado que surge del doblez (D) tiene siempre una longitud mayor que el ancho de (A)

2. Si enumeramos cada componente del robot, cada tipo de robot lo podremos simbolizar como un vector de 2001 entradas $(a_1,\ldots,a_{2001})$ donde cada entrada a_i es A o B, dependiendo de la marca del componente i.

Como cada componente tiene dos opciones, tendremos 2^{2001} tipos de robot.

Si dos robots son compatibles significa que sólo una entrada es distinta, y sólo tiene una opción para ser distinta por haber solamente dos tipos de marca, de aquí que cada robot sea compatible a 2001 robots.

Las parejas de robots compatibles serán la cantidad de distintos tipos de robots multiplicadas por la cantidad a la que cada robot es compatible y luego divida entre dos ya que la pareja de robots $\{i,j\}$ será la misma que $\{j,i\}$.

Conclusión:

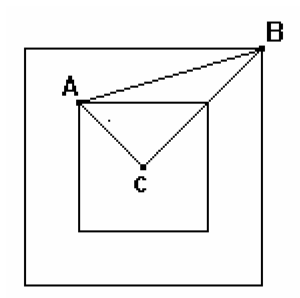
a) 2^{2001}
b) 2001
c) $\dfrac{2001\cdot 2^{2001}}{2} = 2001\cdot 2^{2000}$

3. Recordemos que el área de un cuadrilátero es la mitad del producto de sus diagonales, entonces para un cuadrado será la mitad del cuadrado de la longitud de su diagonal.

Si les llamamos **D** y **d** a las longitudes de las diagonales del cuadrado grande y chico respectivamente, el problema se reduce a calcular: $P+Q=\dfrac{D^2}{2}+\dfrac{d^2}{2}=\dfrac{D^2+d^2}{2}$.

Llamemos **C** al centro de los cuadrados. Tracemos **BC** y **CA**. El ángulo **BCA** es recto, por lo cual el triángulo **ABC** es rectángulo con hipotenusa **AB**. Notemos además que la longitud de **BC** como la de **CA** son la mitad de las diagonales del cuadrado grande y chico respectivamente.

Usando el teorema de Pitágoras y haciendo las sustituciones respectivas obtenemos:



$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{D^2+d^2}{4}=\frac{1}{2}\cdot(P+Q)$$

Por lo cual $P+Q=2\cdot\overline{AB}^2=2\cdot 3^2=18$

4. Es factible contarlas de diversas maneras, por ejemplo: cuántas formas distintas se tienen si sólo se usó un color; cuántas si se usan tres, y cuántas si se usan los cuatro.

Usando un color, solamente hay una forma de pintarlos: las cuatro caras iguales. Hay en total 4 posibilidades, una por cada color.

Usando dos colores, se presentan dos casos. Primer caso, una cara de un color y las otras tres de un mismo color diferente al anterior. Segundo caso, dos caras de un mismo color, y las otras de un mismo color diferente al anterior. En el priemr caso hay cuatro posibilidades de pintar la cara que va distinta a las restantes, y tres posibilidades (porque debe usarse un color diferente al anterior) para pintar éstas, lo que nos daría doce (4 por 3) posibilidades en este primer caso. En el segundo caso hay seis posibilidades, pues al usar los dos colores se tiene: ab, ac, ad, bc, bd y cd. Entre ambos casos tenemos **18 posibilidades.**

Usando tres colores, un color se usará para pintar dos caras y los otros dos para pintar una cara con cada uno. El color para las dos caras, puede ser cualquiera de los cuatro, y de los tres restantes habrá que escoger sólo dos, esto último puede ocurrir de tres diferentes formas. Así, cuando se usan tres colores, tenemos **12 posibilidades**.

Usando cuatro colores, solamente hay **2 posibilidades** de pintar al tetraedro (una es imagen espectacular de la otra).

Por último, sólo falta sumar las posibilidades para cada una de las situaciones; esto nos da un total de **36 posibilidades.**

Prueba 3 de Selección
8 de Septiembre de 2001

PROBLEMAS

Primer día

1. Encontrar el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2001 y el producto es 2^{751}.

2. ¿Cuántas listas de 7 números de dos cifras son tales que cada tres de ellos que son consecutivos en la lista suman múltiplo de 3? (Nota: En cada lista pueden repetirse números).

3. En un triángulo **ABC**, sea **D** el pie de la altura en **A** y sea **M** el punto medio de esa altura. Sea £ la recta que pasa por **D** y que es paralela a **AC**. La recta **BM** corta a **AC** en **P** y a £ en **Q**. Sean **R** y **S** los pies de las perpendiculares a **BC** por **P** y **Q**, respectivamente. Prueba que la suma de las longitudes de **PR** y **QS** es igual a la longitud de la altura **AD**.

4. En la siguiente cuadrícula se tienen escritos los números del 1 al 45 como se indica la figura. Un *movimiento* consiste en elegir dos casillas e intercambiar los números que aparecen en ellas. Describe una forma de lograr 12 movimientos (o menos) que las 5 sumas de los números que aparecen en cada renglón sean todas iguales.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	36	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45

Segundo día

5. En un torneo hubo 8 competidores (**A, B, C, D, E, F, G** y **H**). Cada uno jugó exactamente contra otros 3. En cada juego se le dieron 2 puntos al ganador, 0 al perdedor y, en caso de empate, se le dio un punto a cada competidor. Si **A** obtuvo 4 puntos, **B** obtuvo 2, **C** obtuvo 3, **D** obtuvo 1, **E** obtuvo 6, **F** obtuvo 1 y **G** obtuvo 4, ¿Cuántos puntos obtuvo **H**?

6. Dos círculos **C** y **D**, con respectivos centros **M** y **N**, se intersecan en dos puntos distintos. Sea **P** uno de esos puntos. La recta **MP** corta por segunda vez al círculo **D** en **R** y la recta **NP** corta por segunda vez al círculo **C** en **S**. Prueba que **M, S, R** y **N** son concíclicos.

7. Encontrar una pareja de enteros (a, b) que satisfaga a>2 y $2a^2 = b(b+2)$.

8. Un triángulo equilátero **ABC** de lado 2 tiene gravicentro **G**. Sean $\mathbf{G_1}$ el reflejado de **G** a través de la recta **AC**, $\mathbf{G_2}$ el reflejado de $\mathbf{G_1}$ a través de la recta **BC** y $\mathbf{G_3}$ el reflejado de $\mathbf{G_2}$ a través de la recta **AB**. Encuentra la distancia de $\mathbf{G_3}$ a **G**.

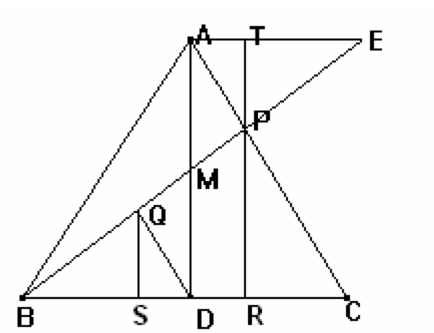
SOLUCIONES:

1. Como queremos que el producto de las cifras sea una potencia de 2, las únicas posibilidades para las cifras son 1, 2, 4 y 8. Buscamos el menor número **N** que cumpla las propiedades así que **N** debe tener la menor cantidad de cifras posible y esto se logra claramente usando tantos como sea posible. Sea a el número de 1´s de **N**, b en número de 2´s, **c** el número de 4´s y **d** el número de 8´s. Podemos expresar la suma de las cifras de **N** es 2001 en la siguiente ecuación: $a+2b+4c+8d=2001$(*). La condición de que el producto de las cifras sea 2^{751} se expresa con la ecuación: $b+2c+3d=751$ (**), (pues $1=2^0, 2=2^1, 4=2^2, 8=2^3$). Por (*) tenemos que d ≤ 250. Si d = 250 entonces, por (**), $b+2c=1$, de donde b=1 y c=0, contradiciendo (*). Entonces d<250. Para d = 249, en (**) tenemos $b+2c=4$; otra vez queremos que c sea lo mayor posible, así que c=2 y b=0. Entonces, sustituyendo estos valores en (*) obtenemos a=1. Así:

$$N=144\underbrace{8\ldots8}_{249}.$$

2. Observemos primero que los números de 2 cifras son 90. Los primeros dos términos los podemos escoger arbitrariamente, es decir, hay 90^2 posibilidades. A partir del tercer término, la elección queda determinada por el residuo módulo 3 del producto de los términos elegidos anteriormente, es decir, en cada caso hay $\frac{90}{3}$ posibilidades. Entonces la respuesta es $90^2\,30^5$.

3. Sea **E** el punto de intersección de **BM** con la paralela de **BC** por **A**. Sea **T** el punto de intersección de **PR** con **AE**. Entonces es claro que **PT** es la altura en **P** del triángulo **PAE**. Ahora observemos que los triángulos **MAE** y **MDB** son congruente, pues tienen sus lados paralelos y **AM = MD**. De aquí tenemos que **BD = AE**. Por otro lado, los triángulos **QBD** y **PEA** también tiene sus lados paralelos, así que también son semejantes, pero como **BD = AE**, entonces son congruentes. Sabemos que dos triángulos iguales tienen la misma altura, así que **QS = PT**.
   Así, **AD = TR = TP + PR =QS +PR,** como queríamos.



4. Llamaremos Σ a la suma que queremos obtener en cada renglón (como la suma de todos los números de la cuadrícula es $\frac{45\times46}{2}$, entonces $\Sigma=\frac{45\times46}{2\times5}$). Para ver cuál es la diferencia de la suma de los otros renglones con Σ (sin hacer cuentas), observemos que los números se van incrementando en 9 hacia abajo (por ejemplo, 10 = 1 + 9, 35 = 26 + 9, etc.). Tenemos entonces que las sumas iniciales de los renglones son como sigue: la del primer renglón es Σ-18·9, la del segundo es Σ-9·9, la del tercero es Σ, la del cuarto es Σ+9·9 y la del quinto es Σ+18·9.

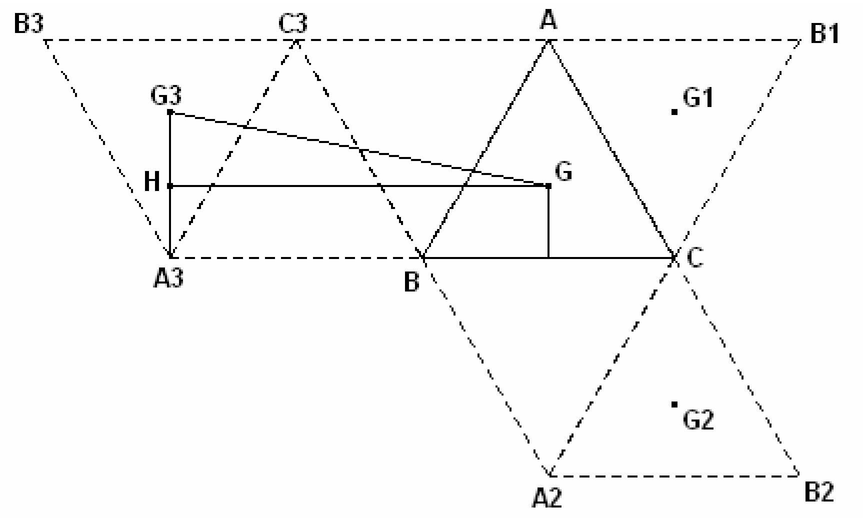
Hechas estas observaciones, vemos que una posibilidad conveniente es intercambiar números en casillas de la misma columna (pues intercambios de este estilo agregan o quitan nueves). Entonces intercambiemos el 1 con el 37, el 2 con el 38, el 3 con el 39 y el 4 con el 40; en cada intercambio modificamos el primero y el quinto renglón por 4 nueves, así que en total se han modificado 16 nueves (de los 18 necesarios en estos renglones). Análogamente intercambiamos 10 y 28, 11 y 29, 12 y 30, y 13 y 31; de esta manera, el segundo y el cuarto renglones se habrán ajustado cada uno con 8 nueves. Para las modificaciones finales usemos el tercer renglón: intercambiemos 5 y 23 (aquí el primer renglón ya queda bien, pero el tercero se desajustó y perdió 2 nueves), 15 y 24 (el segundo ya queda bien y el tercero pierde otro nueve), 25 y 34 (el cuarto queda bien y el tercero gana un nueve) y 26 y 44 (tercero y quinto renglones ya quedan bien).

5. En total e jugaron $\frac{8\times3}{2}=12$ partidos. Cada partido otorgó un total de 2 puntos (según el resultado del partido se reparten 2 puntos entre los dos competidores). De esta manera, el total de puntos obtenidos debe ser 24. Como la suma de los puntos de **A, B, C, D, E, F** y **G** es 4 + 2 + 3 + 1 + 6 + 1 + 4 = 21, entonces **H** ganó 24 – 21 = 3 puntos.

6. El triángulo **SMP** es isósceles (pues **MP** y **MS** son radios de **C**) y, por lo tanto, $\angle MSP=\angle MPS$. Análogamente, $\angle NPR=\angle NRP$. Pero los dos ángulos en **P** son iguales por ser opuestos por el vértice, así que $\angle MSN=\angle MRN$ y esta condición es suficiente para que el cuadrilátero **MNRS** sea cíclico.

7. Como by b+2 tienen la misma paridad y su producto es par, entonces ambos son pares. Escribamos b = $2b_1$. Entonces $a^2=2b_1(b_1+1)$, así que a también es par: a = $2a_1$. De aquí tenemos que $2a_1^2=b_1(b_1+1)$, es decir, el coeficiente binomial (o número triangular) $\frac{b_1(b_1+1)}{2}$ es un cuadrado. Analizando las posibilidades vemos que para b_1=8, $\frac{b_1(b_1+1)}{2}=6^2$. En este caso, b = 16 y a = 12.

8. Para observar fácilmente dónde está **G_3** en relación al triángulo **ABC**, reflejamos este triángulo varias veces (como poniendo espejos sobre los lados de **ABC**).



Tracemos **H** tal que HG||BC y $\angle G_3HG = 90º$. Observemos que HG = 3 y que además G_3H es 1/3 de la altura de ABC puesto que AG = A_3G_3 y esta longitud es igual a 2/3 de dicha altura porque sabemos que el gravicentro de un triángulo divide a cada mediana en razón 1:2, y porque en un triángulo equilátero las medianas coinciden con las alturas. Ahora, por Pitágoras la altura mide $\sqrt{3}$ y así $G_3H = \frac{\sqrt{3}}{3}$; nuevamente, por Pitágoras $G_3G = \sqrt{\frac{1}{3}+9} = \sqrt{\frac{28}{3}}$.