Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2mil7

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

FINAL, 08 de septiembre de 2007

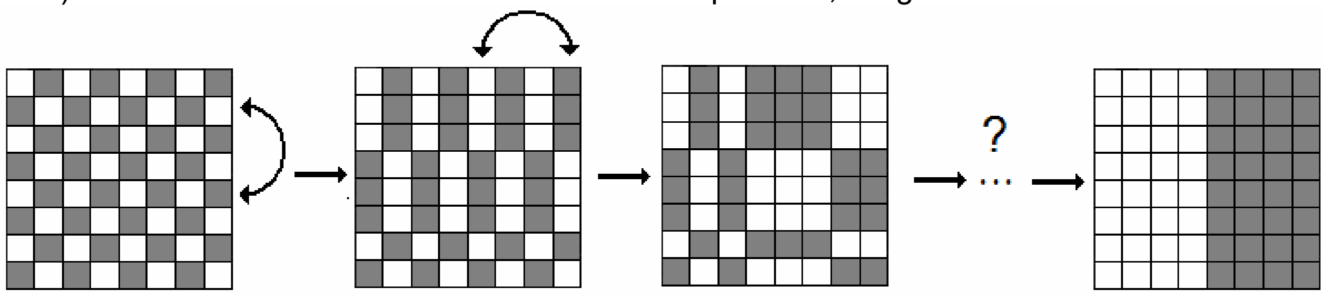
PROBLEMAS

1. Se desea cambiar el orden de los cuadritos negros de un tablero de ajedrez tradicional, de modo que el tablero quede configurado como en la figura de la derecha.

Para llevar a cabo este cambio se podrá:

i) seleccionar dos filas e intercambiar su posición, sin girar, o bien

ii) seleccionar dos columnas e intercambiar su posición, sin girar.



¿Es posible lograr que el tablero tenga la configuración deseada? Justifica tu respuesta.

2. Un pastel de cumpleaños se decoró con 83 *velitas mágicas*. Dichas velitas tienen la siguiente propiedad *mágica*: cada soplido puede apagar únicamente 5, 8, 10 o 27 velitas; y permanecen prendidas las que están prendidas (¡obvio!) y apagadas las que se apagaron. Pero pasados tres segundos de haber soplado, se vuelven a prender algunas de las que se apagaron, según lo siguiente.

i) al apagar 5 velitas sucede que 2 velas se vuelven a encender

ii) al apagar 8 velitas sucede que 5 velas se vuelven a encender

iii) al apagar 10 velitas sucede que 1 vela se vuelve a encender

iv) al apagar 27 velitas sucede que 6 velas se vuelven a encender

En algún momento, al menos durante un par de segundos, ¿será posible tener todas las velitas apagadas? Justifica tu respuesta.

3. Chunchito quiere acomodar los números 1, 1, 2, 2, 3, 3,..., 21, 21, 22 y 22 en veintidós parejas (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... y (a_{22}, b_{22}) de modo que las sumas a_1+b_1, a_2+b_2, ... y $a_{22}+b_{22}$ den como resultado veintidós números consecutivos.

Di cómo debe hacer Chunchito esta tarea, o demuestra que no es posible hacerlo.

4. En un triángulo ABC se toman los puntos P y Q sobre los lados AB y AC, respectivamente, de modo que PC y BQ son alturas del triángulo y, además, $AQ = 2$, $AP=3$ y $PB=5$.

Calcula el área y el perímetro del triángulo ABC.

FINAL, 08 de septiembre de 2007
SOLUCIONES

1. Notemos que inicialmente en cada columna (del tablero) hay exactamente cuatro cuadritos de color negro, y por otro lado, en la configuración en la que queremos dejar al tablero hay columnas solamente con cero u ocho cuadritos negros.

No es posible llevar a cabo la tarea deseada pues, con los intercambios permitidos, siempre quedarán 4 cuadritos negros en cada columna (y no 0 u 8 como se desea). En efecto, al intercambiar dos columnas cualesquiera la cantidad de cuadritos negros que hay en cada columna no varía. Lo mismo pasa si se intercambian dos filas. De este modo, no importa cuántas o cómo se realizan los intercambios, la cantidad de cuadritos negros que hay en cada columna será igual a 4.

2. Notemos que tras un soplido que apaga 5 velitas, después de tres segundos, se vuelven a encender otras 2, en total sólo se logran apagar 3. Entonces si apago 5 velitas veintiséis veces sólo se lograrán apagar 26x3 velitas, es decir 78 velitas, por lo cual quedarían 83-78=5 velitas prendidas. Si vuelvo apagar 5 velitas, durante tres segundos estarían apagadas todas las velitas, por lo tanto, en algún momento, durante un par y medio de segundos estarían todas apagadas.

3. Vamos a demostrar que es imposible llevar a cabo la tarea deseada. La demostración se hará por el *método de reducción al absurdo*: Supongamos, por el contrario, que sí es posible llevar cabo la tarea. Denotemos entonces por

$$n + 1,\ n + 2,\ n + 3,\ n + 4,\ \ldots,\ n + 20,\ n + 21,\ n + 22$$

a los números enteros consecutivos obtenidos. Tenemos entonces la siguiente ecuación:

$$(n + 1) + (n + 2) +\ldots+ (n + 21) + (n + 22) = (a_1 + b_1)+ (a_2 + b_2)+\ldots+ (a_{21} + b_{21})+(a_{22} + b_{22}).$$

La suma del lado derecho de la ecuación es igual a 1 + 1 + 2 + 2 +…+ 21 + 21 + 22 + 22 y podemos hacer una simplificación de la ecuación del modo siguiente:

$$22\,n + (1 + 2 +\ldots+ 21 + 22) = 1 + 1 + 2 + 2 +\ldots+ 21 + 21 + 22 + 22$$

$$22n = 1 + 2 +\ldots+ 21 + 22$$

$$22n = 22(23)/2$$

con lo cual obtenemos que n debería ser igual a 23/2. Esto no puede ser porque, en tal caso, la sucesión obtenida $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, …, $n + 20$, $n + 21$, $n + 22$ no sería de números enteros (como se pide), lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que la tarea deseada es imposible.

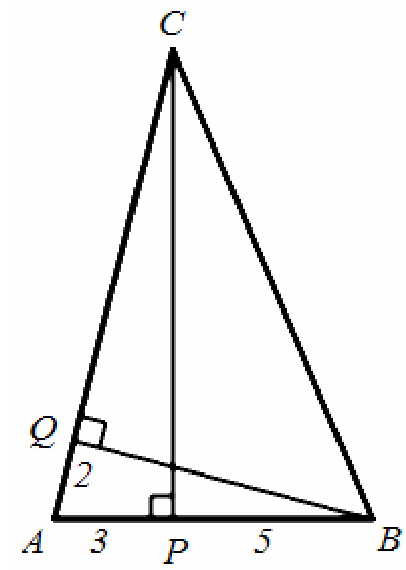
El problema es un caso particular de otro que hubiera solicitado que se tuvieran los números hasta un par cualquiera (en lugar de 22), llamémosle n = 2k, es decir supondremos que los números son 1, 1, 2, 2, 3, 3, … , 2k y 2k (en el problema, n es 22 y k es 11), y que tenemos que acomodarlos en parejas (a_1, b_1), (a_2, b_2), … y (a_{2k}, b_{2k}) de modo que las sumas sean $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_{2k} + b_{2k}$, sean números consecutivos.

En la lista de números que nos dan hay 2k números pares y 2k números impares. Por otra parte, en los 2k números consecutivos que queremos formar, debe haber k números impares y k números pares. Los k impares se forman sumando un número impar con un número par, por lo cual necesitamos k pares y k impares de la lista que nos dan, y quedan k números pares y k números impares para formar los k números pares, los cuales deben ser suma de una pareja de números impares o de una pareja de números pares, o equivalentemente, necesitamos formar $\frac{k}{2}$ parejas de números impares y $\frac{k}{2}$ parejas de números pares, lo que significa que k es múltiplo de dos. Entonces, si se puede hacer la lista y n = 2k, se debe pedir también que n sea múltiplo de 4. En nuestro caso, ya señalamos, n es 22, y como 22 no es múltiplo de 4, entonces no es posible llevar a cabo la tarea. Te retamos a que ahora trates de resolver el problema cuando n sea un número impar.

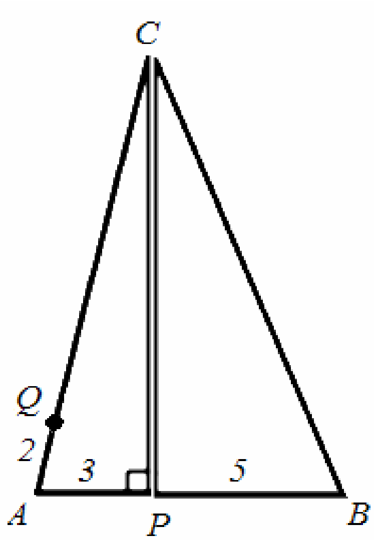
4. Si encontramos las medidas de CQ y BQ podremos calcular el área y el perímetro pedidos del siguiente modo:

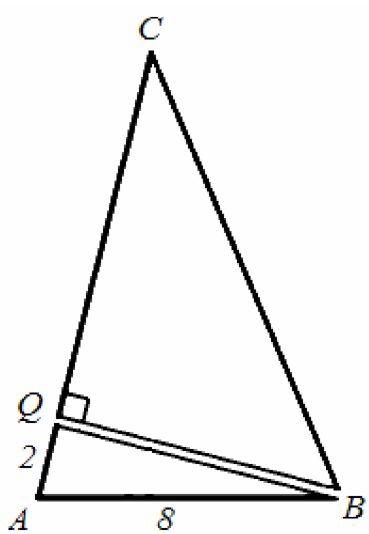
Área$(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BQ = \frac{1}{2}(2 + CQ) \cdot BQ$, y

$$\begin{aligned} \text{Perímetro}(ABC) &= AB + BC + CA \\ &= (3+5) + BC + (CQ+2) \\ &= 10 + BC + CQ \\ &= 10 + \sqrt{BQ^2 + CQ^2} + CQ \end{aligned}$$



Cada una de las alturas CP y BQ divide al triángulo original en dos triángulos rectángulos, obteniéndo cuatro triángulos rectángulos donde podemos aplicar el teorema de Pitágoras y obtener que:





1) en el triángulo ABQ,
$$BQ^2 = 8^2 - 2^2 = 60$$

2) en el triángulo APC,
$$PC^2 = (CQ + 2)^2 - 3^2$$

3) en el triángulo BQC,
$$BC^2 = BQ^2 + CQ^2$$

4) en el triángulo BPC,
$$BC^2 = PC^2 + 5^2$$

Usamos las igualdades 3) y 4), que ambas tienen el valor de BC^2, para establecer la ecuación
$$BQ^2 + CQ^2 = PC^2 + 5^2.$$
La cual desarrollamos utilizando los valores correspondientes de BQ^2 y PC^2 que nos proporcionan las igualdades 1) y 2) para concluir que:

$$60 + CQ^2 = \left((CQ+2)^2 - 9\right) + 25$$

De esta última ecuación, podemos despejar el valor de CQ

$$60 + CQ^2 + 9 - 25 = CQ^2 + 4CQ + 4$$
$$40 = 4CQ$$
$$10 = CQ$$

En conclusión, al sustituir los valores de CQ y BQ en las fórmulas iniciales, se tiene:

Área$(ABC) = (2+10) \cdot \sqrt{60} = 12\sqrt{15}$

Perímetro$(ABC) = 10 + \sqrt{60 + 100} + 10 = 20 + 4\sqrt{10}$