SEMIFINAL, 09 de junio 2007

SOLUCIONES

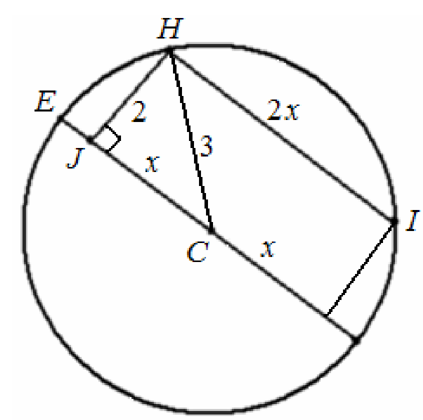
1) Habrá **tres maneras** de anotar las dos películas **de ciencia ficción** que verán, pues al elegir dos películas, la tercera se quedará afuera y son tres las maneras de dejar una película de ciencia ficción sin ver.

Después, verán dos de acción. Para anotar éstas, elegirán una de las cuatro y luego una de las tres restantes, es decir hay doce formas de escribirlas, pero como no importa el orden de éstas, en realidad sólo **hay seis formas** de anotar las **de acción** ya que entre las doce habrían anotado "ver primero la película A y luego la B", que es lo mismo que haber anotado "ver primero la película B y luego la A" y lo mismo sucederá con cualquier pareja de películas.

De manera similar, para las de suspenso, anotarán una de las cinco y luego una de las cuatro restantes, es decir habrá veinte formas de anotar las dos que verán, pero, al igual que el caso anterior habrían anotado "ver primero la película A y luego la B", que es lo mismo que haber anotado "ver primero la película B y luego la A" y lo mismo sucederá con cualesquiera de las veinte parejas, es decir, sólo **hay diez maneras** de anotar las películas **de suspenso** si no les importa el orden.

Por último, para cada una de las tres maneras de anotar las de ciencia ficción, le siguen seis maneras distintas de anotar las de acción, es decir, son dieciocho (18 = 3 x 6) posibilidades de anotar esos dos géneros. Cada una de las dieciocho formas puede estar seguida de diez maneras de anotar las de suspenso, por tanto, **hay 180 opciones en su lista**.

2) Podemos dibujar un radio en nuestra figura, a la cual le añadimos otro segmento (bajando una perpendicular al diámetro, desde I) para que se aprecie la simetría del rectángulo que se forma. Con ello nos percatamos de la existencia del triángulo rectángulo HJC. Así mismo, el valor pedido es el doble del lado JC en el triángulo citado, llamémosle x a la medida del segmento JC.



Sea r el radio del círculo. Puesto que el perímetro es $2\pi r$, entonces el radio mide 3 *cm*. Por cierto que dicho radio es la hipotenusa del triángulo rectángulo HJC, y conocemos también la medida del cateto HJ (2 *cm*).

Mediante el teorema de Pitágoras, es posible determinar la medida x del cateto JC:

$3^2 = 2^2 + x^2$. De donde, al despejar, obtenemos que $x = \sqrt{5}$. Así, el segmento HI mide $2\sqrt{5}$ centímetros.

3) Si observas bien, todos los sumandos que rebasan a 4!, llevan un cero en las unidades. En efecto, puesto que 5!= 120, cualquier factorial mayor será un múltiplo de 10. y la suma de los primeros cuatro factoriales es 1! + 2! + 3!+ 4! = 1 + 2 + 6 +24 =33, concluimos que el dígito de las unidades de la suma 1! + 2! + 3!+ 4! + 5!+ ... + 2007! es 3. Pero ningún cuadrado termina en tres.

Esto último es fácil de ver: el cuadrado de un número que termina en 0, terminará también en 0; el cuadrado de un número que termina en 1 ó 9, terminará en 1; el cuadrado de un número que termina en 2 u 8, terminará en 4; si el número termina en 3 ó 7, su cuadrado terminará en 9, si termina en 4 ó 6, su cuadrado termina en 6, si el número termina en 5, su cuadrado terminará en 5.¡Ningún cuadrado termina en tres! Por ello, la suma de esos factoriales no es un cuadrado.

4) Sean x filas y y columnas. Hay cuatro estudiantes (los de las esquinas) que sólo se saludan con tres compañeros, es decir, provocan 12 saludos.

Hay $2(x - 2) + 2(y - 2) = 2x + 2y - 8$ alumnos que están en las orillas, sin estar en las esquinas, y cada uno de esos sólo saludan a cinco compañeros.

El resto, $(x-2)(y-2)= xy-2x-2y+4$, saludan a ocho compañeros.

Contándolos de esa manera, estaremos contando el doble de saludos, porque contaremos el mismo saludo cuando consideramos a quien lo da y a quien lo recibe. Así, los saludos que dan los de las esquinas, más los de las orillas, más los otros (que no están en orilla o esquina), serán 2 x 157, que corresponde a la ecuación:

$$12+5\cdot(2x+2y-8)+8\cdot(xy-2x-2y+4)=314,$$

la cual se reduce a $4xy-3x-3y=155$, que mediante la factorización podemos escribir como

$$(4x-3)(4y-3)=629.$$

Pero el número 629 se puede factorizar como el producto de los primos 17 y 37 (629 = 17 x 37), esto nos da que x=10 y que y=5 (o al revés). Por tanto, hay 50 alumnos.