SOLUCIONES

1. Consideremos caso por caso. En primer lugar están los números de una cifra, son **nueve**: 1, 2, 3,..., 8 y 9. Después están los de dos cifras, que son otros **nueve**: 11, 22, 33,..., 88 y 99. Los de tres cifras empiezan y terminan con el mismo dígito, sin importar al dígito intermedio; así, hay nueve dígitos para empezar (y terminar) y hay diez posibilidades en cada caso para colocar el dígito intermedio, es decir, hay ($9\times 10=90$) **noventa** números con esta particularidad: 101, 111, 121,..., 191, 202, 212, 222,..., 292,..., 909, 919, 929,..., 998, y 999. Para el caso de cuatro cifras, sólo están todos los números que inician y terminan en uno, pues de otra manera ya no serían menores a 2002; y en medio tendrán sólo dígitos repetidos, lo cual da **diez** posibilidades: 1001, 1111, 1221, 1331,..., 1881 y 1991. En total hay **118 números menores a 2002 con esta particularidad**.

2. Primero se efectúan las restas en cada uno de los factores:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2000}\right)\times\left(1-\frac{1}{2001}\right)\times\left(1-\frac{1}{2002}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)\times\ldots\times\left(\frac{1999}{2000}\right)\times\left(\frac{2000}{2001}\right)\times\left(\frac{2001}{2002}\right)=$$

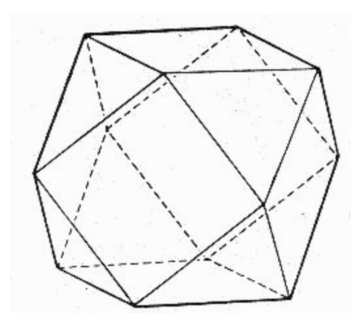
Después se hace el producto:

$$=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\times 1999\times 2000\times 2001}{2\times 3\times 4\times\ldots\times 1999\times 2000\times 2001\times 2002}=$$

En el numerador hay factores que se pueden cancelar con factores del denominador y queda el resultado:

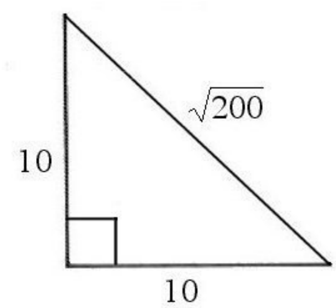
$$=\frac{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\ldots\times\cancel{1999}\times\cancel{2000}\times\cancel{2001}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\ldots\times\cancel{1999}\times\cancel{2000}\times\cancel{2001}\times 2002}=\frac{1}{2002}$$

3. La figura que resulta de quitarle a un cubo todas las esquinas mediante cortes de planos que pasan por los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice es el *cuboctaedro*.

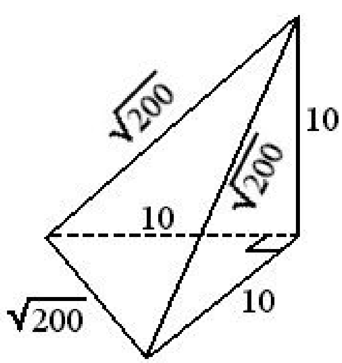


a) Como puede verse, tiene ocho triángulos equiláteros (uno por cada esquina que se quita) y seis caras cuadrados (uno por cada cara)

b) El corte que va de un punto medio al otro es la hipotenusa de un triángulo rectángulo (porque en el vértice del cubo está un ángulo recto y los catetos miden la mitad del lado del cubo) y ésta mide, según el teorema de Pitágoras: $\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}$ *cm*. Ésta será la medida de los lados de los triángulos equiláteros y la de los lados de los cuadrados que resultan; es decir es la medida de las aristas del cuboctaedro.



c) Al volumen del cubo se le están quitando ocho pirámides que tienen como base al triángulo rectángulo señalado en el inciso anterior (que tiene 50 *cm*^{2} de área) y 10 centímetros de altura; es decir, cada pirámide tiene un volumen de $\frac{50\times 10}{3}=\frac{500}{3}$ *cm*^{3}. Así, el volumen del cuboctaedro es el volumen del cubo menos el volumen de ocho pirámides:



$$8000-8\times\frac{500}{3}=\frac{20000}{3}\approx 6666.67 \text{ cm}^3.$$

4. Sea P la cantidad de alumnos que querían al grupo perdedor, entonces la cantidad de alumnos que querían al grupo ganador es $2P$. Sea E la cantidad de alumnos a quienes les era indistinto un grupo u otro.

El total de alumnos (los que votaron por el perdedor, más los que votaron por el ganador, más los que les daba lo mismo) es 500. Simbólicamente se escribe:

$$P+2P+E=500, \qquad \text{que equivale a:} \qquad P=\frac{500-E}{3}.$$

En la urna del grupo perdedor están 384 tarjetas: las que pusieron los que querían al grupo perdedor (dos tarjetas por cada uno), y las que pusieron los que no tenían preferencia de uno sobre otro (una por cada uno, porque la otra la pusieron en la otra urna). Esto se puede expresar como:

$2\times P+E=384$, donde sustituimos el valor de P, para obtener:

$$2\times\frac{500-E}{3}+E=384.$$

Al despejar E de esta ecuación se encuentra el valor pedido: $E=152$

5. Si nos damos cuenta, la suma de enteros consecutivos desde el entero negativo -2001 hasta el $+2002$ tiene 4004 sumandos y da como resultado 2002, y seguramente ésta será la más larga de todas, pero contiene al 2001 y el problema pedía que no lo contuviera. Sin embargo ahí hay una clave de cómo aumentar la cantidad de sumandos en una suma de números consecutivos positivos con los enteros negativos sin que se altere el resultado.

Por tanto, consideraremos la suma de enteros positivos, y luego la aumentaremos con los negativos que hagan falta para hacerla lo más larga posible (obviamente entre menos sumandos tenga la suma de enteros positivos que den 2002 como resultado, más sumandos tendrá al añadirle los sumandos negativos).

Aunque el problema puede resolverse algebraicamente al considerar series aritméticas, la clave importante tendrá que ver con la *media* (el promedio) de los números y con la mediana (el valor que está en medio): si la cantidad de números enteros positivos consecutivos es un número impar, el promedio de ellos coincidirá con el número entero que está en la mitad de la lista; por el contrario, si dicha cantidad de enteros positivos consecutivos es par, el promedio tendrá una parte decimal igual a "**.5**", y habrá tantos números consecutivos positivos debajo de ese valor como por encima de él. Con estas dos premisas podemos examinar los promedios que cumplan lo dicho:

CANTIDAD DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS CONSECUTIVOS	PROMEDIO	SUMANDOS
1	2002	2002
2	1001	No hay porque no termina en 0.5
3	667	No hay porque no es entero
4	500.5	$499+500+501+502$
5	400.4	No hay porque no es entero
6	333.667	No hay porque no termina en 0.5
7	286	$283+284+285+$ **286** $+287+288+289$

Y esto sigue así (es claro que la cantidad de enteros positivos consecutivos que cumplan con las premisas son divisores impares de 2002 o el doble de ellos). No es necesario calcularlos todos, aunque sí los mas pequeños, porque entre éstos se encuentra lo pedido.

Así, para un sumando se tendrá $\frac{2002}{1}=2002$, que al ampliarla con números negativos debe contener a 2001 y el problema exceptúa ese caso. El siguiente valor válido es el que tiene cuatro sumandos, pues $\frac{2002}{4}=500.5$, lo que implica que dos sumandos deben estar por debajo de 500.5 (ellos son 499 y 500) y los otros dos por encima de este valor (que son 501 y 502) pero podemos añadirle la suma que hay desde –448 hasta +448 (es decir añadirle cero) y tener una suma de 1001 sumandos, que es el resultado pedido:

$$(-498-497-496-....-1+0+1+...+498)+499+500+501+502=2002$$

5. OTRA SOLUCIÓN (obviamente con la misma respuesta)

El problema consiste en buscar dos enteros positivos m y n, con $n < 2002$, tales que:

$$2002 = -m-(m-1)-(m-2)-\ldots-2-1+0+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=$$

que son dos sumas (de 1 a m, negativos, y de 1 a n, positivos) y el cero. Así:

$2002 = \dfrac{-m(m+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2}$, lo que con un poco de álgebra se transforma en:

$$4004 = -m^2-m+n^2+n = (n^2-m^2)+(n-m) = (n-m)(n+m)+(n-m) =,$$

es decir: $4004 = (n-m)(n+m+1)$.

Sean $a = n-m$ y $b = n+m+1$, al resolver el sistema, obtenemos:

$$n = \frac{a+b+1}{2} \text{ y } m = \frac{b-a-1}{2}$$

Notemos lo siguiente:

1) Para que el sistema anterior tenga soluciones enteras, a y b deben tener paridad distinta (esto es: uno debe ser par y el otro impar).

2) La cantidad de sumandos es exactamente $b = n + m + 1$, el cual es factor de 4004.

Por lo tanto, nos concretaremos a buscar el máximo valor de b, con paridad distinta a la de a.

Así pues, el valor más grande para b es $b = 4004$, para lo cual a debe ser 1, resolviendo el sistema para estos valores obtenemos $n = 2002$ y $m = 2001$ lo cual no es la solución satisfactoria ya que n debe ser menor a 2002.

El siguiente caso es $b = 1001$ y $a = 4$, del cual obtenemos

$n = 502$ y $m = 498$, por lo cual:

$-498 - 497 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 500 + 501 + 502 = 499 + 500 + 501 + 502 = 2002$, la cual tiene $m + n + 1 = 498 + 502 + 1 = 1001$ sumandos.