Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

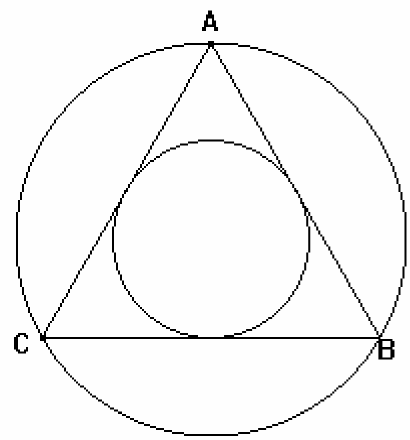
20 Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS aguascalientes 2006

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

SEMIFINAL, 20 de mayo 2006

PROBLEMAS

1) En la siguiente figura, determina el área del triángulo equilátero ABC, sabiendo que los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo miden 6 *cm* y 12 *cm*, respectivamente.



2) Rogelio se va mudar a una casa la cual tiene como habitantes varios ratones, para terminar con ellos, ha decidido comprar un gato entrenado para matar 4 ratones diariamente por la mañana. Al saber esto, los ratones prepararon una contraofensiva: duplicar su cantidad al final de cada 5 días, empezando a contar éstos en la mañana de la llegada del gato. Después varios días de lucha, el gato resultó victorioso, comiéndose la mañana del día número 15, los últimos 4 ratones. ¿Cuántos ratones había en la casa el día que llegó el gato?

3) ¿Cuál es el menor número que cumple con las siguientes condiciones?:

a) Tiene 2006 cifras (la cifra de hasta la izquierda es mayor que cero).
b) La suma de sus cifras es 2006.
c) Es múltiplo de 20.

4) ¿Cuántos números enteros positivos múltiplos de cuatro existen que cumplan lo siguiente?:

a) La suma de los cuadrados de sus cifras es 20.
b) El producto de sus cifras es el cuadrado de un número entero positivo.

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS aguascalientes 2006

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

SEMIFINAL, 20 de mayo 2006

SOLUCIONES

1) Llamemos P al centro de la circunferencia y M al punto medio del segmento BC. Notemos que AM es la altura del triángulo ABC, por ser equilátero; además, se cumple que:

AM = MP + PA = 6 + 12 = 18

(por ser los radios de las circunferencias).

El valor de MB lo podemos obtener aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BPM:

$$MB = \sqrt{BP^2 - PM^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144-36} = \sqrt{108} = \sqrt{36\times 3} = 6\sqrt{3}$$

Por lo cual, la base del triángulo ABC es 2MB $= 12\sqrt{3}$.

Por lo tanto el área del triángulo ABC es $\dfrac{(12\sqrt{3})(18)}{2} = 108\sqrt{3}$ cm^2.

2) La cantidad de ratones que había en un inicio puede denotarse con a.

Se sabe que al final de los primeros 5 días había $a-20$ ratones.

Al inicio del sexto día había $2(a-20)$ ratones.

Al final de los primeros 10 días había $2(a-20)-20 = 2a-60$ ratones.

Al inicio del onceavo día había $2(2a-60)$ ratones.

Al final de los 15 días había $2(2a-60)-20 = 4a-140$ ratones.

Como el gato termina su misión en el quinceavo día entonces: $4a-140=0$, lo que significa $a=35$

Otra forma de ver el problema es que del onceavo al quinceavo día el gato mató a los últimos ratones, es decir, a 20. Esto significa que al final del décimo día había 10 ratones.

Del sexto al décimo día el gato mató 20 ratones por lo que inició con 30 ratones el sexto día. Lo anterior indica que al final del quinto día había 15 ratones.

Como sólo mató 20 ratones en los primeros 5 días entonces inicialmente había 35 ratones.

3) Como la primera cifra debe ser mayor que cero, debe ser 1 para sea lo más chico posible. Por otra parte, entre menos cifras mayores que cero tenga y éstas estén lo más hasta la derecha posible el número será menor, por lo cual, como $2005 \div 9$ es 222 y sobran 7, el menor número de 2006 cifras, que comience en 1 y sus cifras sumen 2006 es:

$$n = 1\underbrace{000\ldots000}_{1782\ \ ceros}7\underbrace{999\ldots999}_{222\ \ nueves}.$$

Pero el número anterior no es múltiplo de 20. Para que un número sea múltiplo de 20, debe ser múltiplo de 4 y 5. Para que sea múltiplo de 5, debe terminar en 5 ó 0, como debe ser múltiplo 4, no puede terminar en 5, por lo cual su última cifra debe ser 0. Para que sea un múltiplo de 4 sus dos últimas cifras deben de formar un número múltiplo de 4, como la última cifra es cero, entonces las únicas posibilidades son 00, 20, 40, 60 u 80. Para que el número sea lo más pequeño posible. Nos conviene que la penúltima cifra sea lo más grande posible por lo cual, si en el número n, al último nueve lo hacemos 8, incrementamos el 7 para hacerlo 8, quitamos un cero y lo ponemos hasta el final, obtendremos el menor número que cumple las condiciones dadas:

$$1\underbrace{000\ldots000}_{1781\text{ ceros}}8\underbrace{999\ldots999}_{221\text{ nueves}}80$$

4) Las cifras del número sólo pueden ser 0, 1, 2, 3 ó 4, para que la suma de los cuadrados de la cifra sea 20. Para que el producto de sus cifras sea un cuadrado positivo, no debe haber ceros; además debe haber una cantidad par de doses y treses.

Por lo anterior tendríamos los siguientes casos:

a) 3, 3, 1, 1
b) 4, 1, 1, 1, 1
c) 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
d) 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

Como el número debe ser múltiplo de cuatro, las últimas dos cifras deben formar un múltiplo de cuatro, lo cual sólo se puede hacer con los casos de los incisos c) y d) haciendo que la últimas dos cifras formen el 12.

Del caso c) se pueden obtener 20 números:

11122212, 11212212, 11221212, 11222112, 12112212, 12121212, 12122112, 12211212, 12212112, 12221212, 21112212, 21121212, 21122112, 21211212, 21212112, 21221112, 22111212, 22112112, 22121112 y 2221112.

Del caso d) sólo podemos obtener 12 números:

21111111111112, 12111111111112, 11211111111112, 11121111111112, 11112111111112, 11111211111112, 11111121111112, 11111112111112, 11111111211112, 11111111121112, 11111111112112 y 11111111111212

Por lo tanto, en total hay $20+12=32$ números.