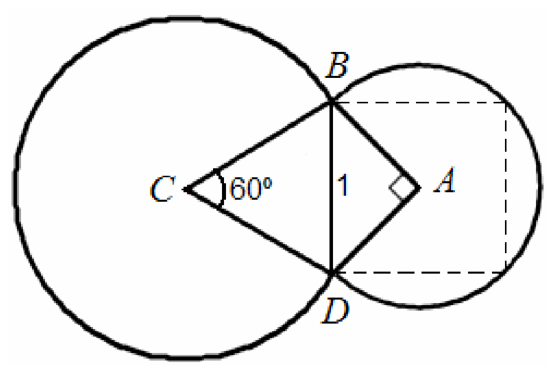
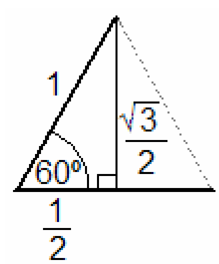
SEMIFINAL, 7 de Junio de 2008

SOLUCIONES

1. El cuadrilátero puede descomponerse en dos triángulos. El triángulo ABD es rectángulo e isósceles, es más, es la cuarta parte de un cuadrado que tiene 1 metro de lado, por ello su área es $\frac{1}{4}\,m^2$.



Ahora nos fijamos en el triángulo BCD, que es isósceles, por ser CB y CD radios del círculo, y como el ángulo BCD mide 60º, entonces el triángulo ADB es equilátero de lado 1. La altura, también calculada con el teorema de Pitágoras, es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por tanto su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}\,m^2$.



Así, el área del cuadrilátero es la suma de las áreas de los dos triángulos:

$$\frac{(1+\sqrt{3})}{4}\,m^2.$$

2. Si un número n es Picudísimo la cifra de las unidades no es cero porque en ese caso $P(n) = 0$. Por otra parte tampoco puede terminar en nueve ya que $P(n + 1)=0$ y por definición de Picudísimo $n + 1$ debe ser Picudo. Por lo tanto la cifra de las unidades de n debe estar entre 1 y 8.

Llamemos a al producto de las primeras 2007 cifras y u a la última cifra, es decir, la de las unidades. Entonces $P(n) = au$ y $P(n+1) = a(u+1)$ y por definición n debe ser múltiplo de au, y $n + 1$ debe ser múltiplo de $a(u+1)$, por lo cual a debe ser divisor tanto de n como de $n + 1$, y en consecuencia debe ser divisor de la diferencia que es 1, por lo tanto $a = 1$ y $P(n) = u$. Con lo anterior concluimos que las primeras 2007 cifras son 1. Sólo falta saber cuál es la cifra de las unidades.

Para eso veamos cuáles números de 2008 cifras cuyas primeras 2007 cifran son 1, son picudos. Ello se traduce en ver cuando n es múltiplo de u. Sólo tenemos ocho casos:

Caso 1: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}1$, $P(n) = 1$, n es múltiplo de 1. Por tanto n es Picudo.

Caso 2: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}2$, $P(n) = 2$, n es par, entonces es múltiplo de 2, por tanto n es Picudo.

Caso 3: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}3$, $P(n) = 3$, y, según el criterio de divisibilidad del 3, la suma de las cifras de n es 2010, cuyas cifras a su vez suman 3, que es múltiplo de 3, por lo tanto n es Picudo.

Caso 4: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}4$, $P(n) = 4$, y, según el criterio de divisibilidad del 4, como el 14 no es múltiplo de 4, n no es Picudo.

Caso 5: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}5$, $P(n) = 5$, y, según el criterio de divisibilidad del 5, n es múltiplo de 5 por terminar en 5, por lo tanto n es Picudo.

Caso 6: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}6$, $P(n) = 6$, y, según el criterio de divisibilidad del 6 (que es cumplir con los criterios de divisibilidad del 2 y del 3), n es par y la suma de las cifras de n es 2013, cuyas cifras a su vez suman 6, que es múltiplo de 3; como es múltiplo de 2 y de 3, es múltiplo de 6, por lo tanto n es Picudo.

Caso 7: $n = \underbrace{111...1}_{2007\,cifras}7$, $P(n) = 7$, para ver si n es múltiplo de 7, sólo basta ver si $\underbrace{111...1}_{2007\,cifras}$ es múltiplo de 7, ya que n termina en 7. El primer número formado solamente con unos que es múltiplo de 7 es 111111, por lo cual, los números formados con puros unos que son múltiplos de 7 son aquellos cuya cantidad de cifras es múltiplo de 6.

(NOTA: No puede ser de otra manera, pues bastaría descomponerlo en dos sumandos: uno con los primeros grupos de sextetos de 1, que resulta divisible entre 7, y el otro como el producto de los unos restantes multiplicados por una potencia de 10, cuyos factores no son divisibles entre 7.. En este caso, $111 \times 10^{2004} + \underbrace{111...1}_{2004\,cifras}$, se ve que el primer sumando no es divisible entre 7, en tanto que el segundo sí lo es.)

Como tenemos 2007 cifras y 2007 no es múltiplo de 6, por lo tanto n no es Picudo.

Caso 8: $n=\underbrace{111...1}_{2007\,cifras}8$, $P(n)=8$, y, según el criterio de divisibilidad del 8, el número formado por las tres últimas cifras de n es 118, que no es múltiplo 8, por tanto n no es Picudo.

(NOTA: Ya no es necesario ver si el siguiente número es picudo —que sí lo es, pero no será Picudísimo— puesto que el anterior no lo fue.) Por lo tanto, como un número es Picudísimo si él y su sucesor son Picudos los únicos números Picudísimos de 2008 cifras son tres: $\underbrace{111...1}_{2007\,cifras}1$, $\underbrace{111...1}_{2007\,cifras}2$ y $\underbrace{111...1}_{2007\,cifras}5$

3. Supongamos que n es un número triangular. Entonces podemos escribirlo como

$$n=\frac{k\,(k+1)}{2}$$

Para demostrar que $9n+1$ también es un número triangular es suficiente demostrar que podemos escribirlo como $9n+1=\frac{K\,(K+1)}{2}$. Esto es posible hacerlo si tomamos $K=3k+1$. En efecto,

$$9n+1=9\left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)+1$$

$$9n+1=\frac{9k^2+9k+2}{2}$$

$$9n+1=\frac{(3k+1)\,((3k+1)+1)}{2}$$

$$9n+1=\frac{K\,(K+1)}{2}.$$

4 a) Basta simular el proceso para encontrar que ésta queda en el lugar 18.

4 b) Se ve, se siente, 2007 está presente ☺

Cada división de palabras se puede ver como poner una “rayita” entre un par de letras; cuando la palabra original está totalmente dividida, entre cada par de letras debe existir una rayita, por lo cual, como la palabra tiene 2008 letras se deben poner 2007 rayitas, es decir 2007 divisiones.