17ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Regional, Aguascalientes

FINAL

Soluciones

6 de septiembre de 2003

Solución al Problema 1:

a) Un número es de la forma 3n+k si y sólo si la suma de sus cifras es de la forma 3n+k.

Cada número de la sucesión está formado por números de la forma: 3k+1 seguido por otro de la forma 3k+2, luego 3k, 3k+1, 3k+2, 3k, etc.

Si sumamos números de la forma 3k+1 con su sucesor 3k+2 obtendremos un múltiplo de 3 (3k+3) y si a éste último le sumamos el sucesor de 3k+2 obtendremos otro múltiplo de 3 (6k+3), entonces de cada tres de la sucesión, dos son múltiplos de tres (A_2, A_3, A_5, A_6, A_8, A_9…). Como $\frac{2003}{3} = 667\frac{2}{3}$ y 667x3=2001 la cantidad de múltiplos de tres hasta A_{2001} serán 667x2=1334, y A_{2003} es el número formado por A_{2001} agregándole 2002 y 2003 a su derecha, como uno es de la forma 3k+1 y otro de la forma 3k+2, A_{2003} también será múltiplo de 3, por lo tanto tenemos en total 1335 múltiplos de 3.

b) Un número es múltiplo de cuatro si y sólo si sus dos últimas cifras forman un número múltiplo de cuatro, entonces si n>9 y múltiplo de 4 A_n también será múltiplo de 4 porque las dos últimas cifras de de n son las mismas que las de A_n. Múltiplos de 4 del 10 al 2003 son 498.

Falta ver qué pasa con los primeros nueve términos. Sólo tenemos que estudiar los términos pares:

A_2=12 si es múltiplo de 4.

A_4=1234 no es múltiplo de 4 ya que 34 no es múltiplo de 4.

A_6=123456 si es múltiplo de 4 ya que 56 es múltiplo de 4)

A_8=12345678 no es múltiplo 4 ya que 78 no es múltiplo de 4.

Por lo tanto tenemos 498+2=500 múltiplos de 4.

c) Un número es múltiplo de seis si y sólo es par y múltiplo de 3.

Por el inciso a) los términos que son pares son los de la forma A_{3k} y A_{3k+2} y los términos pares de la sucesión son números pares.

Entonces los términos de la forma A_{3k} que son pares son los de la forma A_{6k} y los de la forma A_{3k+2} que son pares son de la forma A_{6k+2}.

Términos de la forma A_{6k}, y A_{6k+2} son 333 y 334 respectivamente por lo que en total tendremos 667.

Solución al problema 2

Si algún jugador se encontrara en alguna de las siguientes configuraciones sería ganador:

Configuraciones Ganadoras			
Tipo	Esquema	Descripción	Estrategia
A	oo…oo	Una sola fila con más de una corcholata.	Toma todas menos una y gana.
B	O o oo..oo	Dos filas, con una corcholata y otra con más de una.	Deja una corcholata en cada fila. El siguiente jugador sólo podrá tomar una dejando dos, y por último se toma una ganando la partida.
C	oo..oo oo..ooo..o	Dos filas con diferente cantidad de corcholatas.	Si una fila tiene sólo una corcholata toma las de la otra fila y gana. Si tienen más de dos corcholatas cada fila, deberá de dejar la misma cantidad de corcholatas en cada fila, hasta que su contrincante le deje una corcholata en una fila o tenga una configuración del tipo A.

Si un jugador se encuentra en una configuración del siguiente tipo pierde.

D	O oo ooo	Una, dos y tres corcholatas.	Si toma todas las corcholatas de una fila, dejará a su oponente la configuración C, por lo cual perderá. Si toma una de la fila que tiene dos corcholatas o 2 de la que tiene tres su oponente tendrá la configuración B, por lo cual también perderá. Si toma una de la que tiene tres, su contrincante toma de la fila que sólo tiene una, dejando la configuración: oo oo Por lo cual claramente pierde.

Ahora atacaremos nuestro problema. Después de un buen análisis puede llegar uno a la conclusión de que la forma óptima de comenzar es dejando una sola corcholata en la primera fila:

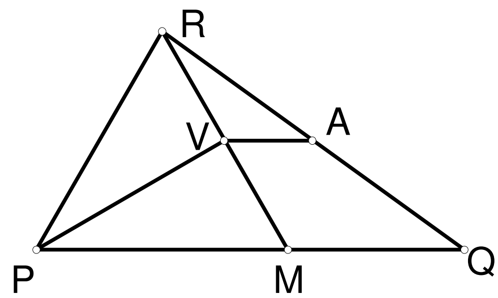
Fila 1 O
Fila 2 oooo
Fila 3 ooooo

Si el segundo jugador toma 1 corcholata de la Fila 1 o 4 de la Fila 2 o 5 de la Fila 3, dejará la configuración C y perderá. Si tomara tres de la Fila 2 o cuatro de la Fila 3, dejará la configuración B y perderá de nuevo.

Si toma 1 o 2 de la Fila 2 o dos o tres de la Fila 3, el primer jugador podrá ponerle la configuración perdedora D.

Por último, si sólo tomara una corcholata de la Fila tres el primer jugador deberá tomar la corcholata de la Fila 1 y seguir el procedimiento para la configuración C.

Solución al Problema 3.



Notemos que $\angle$**PMR=**180º-90º-30º=$\angle$**PRM**, así que el triángulo **PMR** es equilátero y entonces:

1) **MQ** = **PQ**-**PM** = **PQ**-**PR**,
2) **PV** biseca a **MR** (es decir, **VM** = **RV**= ½**PR**).

Al ser **A** y **V** puntos medios de **QR** y **MR** respectivamente, tenemos, por el teorema de Thales, que **AV** es paralela a **QM**. Esto implica que los triángulos **MQR** y **VAR** son semejantes en razón 2:1. Así que **VA**= ½**MQ**= ½(**PQ** - **PR**).

Ahora que ya sabemos cuánto mide cada lado del cuadrilátero **AVMQ** sólo falta sumar dichas longitudes:

AV+VM+MQ+QA = (½(**PQ** - **PR**)) + (½**PR**) + (**PQ**-**PR**) + (½ **QR**)
= ½ (**PQ** - **PR** +**PR** + 2**PQ** - 2**PR** +**QR**)
= ½ (**QR** - 2**PR** + 3**PQ**)

Solución al Problema 4.

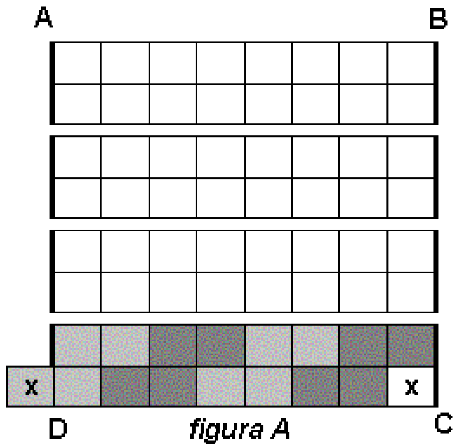


figura A

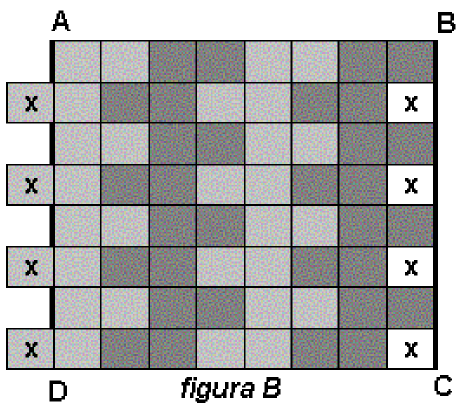


figura B

Podemos ver a nuestro cilindro como el resultado de apilar 4 cilindros de altura 2.

Si encontramos una forma de cubrir un cilindro de altura 2, el problema se reduce a repetir ése acomodo de calcomanías 4 veces (una por cada cilindro de altura 2).

Acomodando 4 calcomanías como en la figura A, tenemos que al formar el cilindro los cuadros marcados con **x** coinciden de modo que el cilindro de altura 2 queda cubierto.

El problema queda resuelto al acomodar las 16 calcomanías como en la figura B.