17ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Estatal, Aguascalientes

SEMIFINAL
SOLUCIONES
7 de junio de 2003

Problema 1.

a) Para responder estas preguntas, supongamos que Edgar nació en el año $19xy$, tanto x como y son dígitos (0, 1, 2,...,8 ó 9); la suma de éstos es $10 + x + y$, que es la edad de él. Pero también la edad es la diferencia que hay entre este año 2003 y el de nacimiento $19xy$, lo cual da lugar a la ecuación

$$10 + x + y = 2003 - (1900 + 10x + y).$$

Al despejar a y, se obtiene $y = \frac{93 - 11x}{2}$, que puede escribirse como

$$y = 46 - 5x + \frac{1 - x}{2},$$

de donde puede verse que x debe ser impar, por ejemplo $x = 2p - 1$. Al sustituir este valor de x en la ecuación anterior, y reducir términos semejantes, se obtiene $y = 52 - 11p$. Recordemos que y es un dígito, por tanto p solamente puede tomar el valor 4. Así, si $p = 4$, entonces $x = 2(4) - 1 = 7$ y $y = 52 - 11(4) = 8$. Por lo que Edgar nació en 1978 y cumple 25 años en este 2003.

b) El año de nacimiento más pequeño corresponderá con el menor número cuyos dígitos sumen 54, esto corresponde al año 999999. Así, la solución será el año en que este sujeto cumpla 54 años: el año 1000053; y Edgar, quien nació en 1978 tendrá entonces 998075 años, probablemente no viva para entonces...

Problema 2.

Claramente, la condición suficiente y necesaria para que el casco de un soldado quede hacia el frente, es simplemente que éste ejecute un número par de órdenes. Así el problema se reduce a demostrar que el número 210 tiene un número par de divisores.

Su factorización por primos es 2 x 3 x 5 x 7, de modo que el número de divisores es: (2)(2)(2)(2)=16 (pues para construir un divisor de 210 basta tomar o no a cada uno de los factores, es decir, hay dos posibilidades para cada caso). Por lo tanto, el casco del soldado con el número 210 queda hacia el frente.

Problema 3.

Sabemos que un triángulo es rectángulo si y sólo si cumple el teorema de Pitágoras. Notemos que: $(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^4-2n^2+1)+4n^2= n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$. Por lo cual es un triángulo rectángulo.

Para resolver la inversa, basta dar un *contra ejemplo* (es un ejemplo donde no se cumple la situación) consideremos un triángulo rectángulo con catetos 1 y 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$, que claramente no cumple lo pedido.

Sin embargo, si queremos generar contra ejemplos enteros, posemos considerar un triángulo rectángulo de hipotenusa n^2+k, y catetos n^2-k y an, entonces:

$(n^2+k)^2=(n^2-k)^2+(an)^2$

$n^4+2n^2k+k^2=(n^4-2n^2k+k^2)+(an)^2$

$4n^2k=(an)^2$

$2\sqrt{k}=a$

Escojamos $k=4$, entonces $a=2$, y por otra parte escojamos el valor $n=3$. Entonces el valor de la hipotenusa será 13 y la medida de los catetos 5 y 12. Los cuales no tienen la forma n^2+1, n^2-1 y $2n$.

Problema 4.

Para que se pueda simplificar una fracción del tipo $\frac{20}{n}$, el 2 ó el 5 deben dividir a n.

Hay $\left[\frac{2003}{2}\right]=1001$ números que son divisibles por 2 y menores o iguales a 2003.

Hay $\left[\frac{20}{2}\right]=10$ números que son divisibles por 2 y menores o iguales a 20.

Por lo tanto hay 1001-10=991 fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 2.

Hay $\left[\frac{2003}{5}\right]=400$ números que son divisibles por 5 y menores o iguales a 2003.

Hay $\left[\frac{20}{5}\right]=4$ números que son divisibles por 5 y menores o iguales a 20.

Por lo tanto hay 400-4=396 fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 5.

En total llevaríamos 991+396=1387, pero estamos contando doble a las fracciones que son divisibles tanto por el 2, como por el 5, es decir, aquellas que son divisibles por 10.

Hay $\left[\frac{2003}{10}\right]=200$ números que son divisibles por 10 y menores o iguales a 2003.

Hay $\left[\frac{20}{10}\right]=2$ números que son divisibles por 10 y menores o iguales a 20.

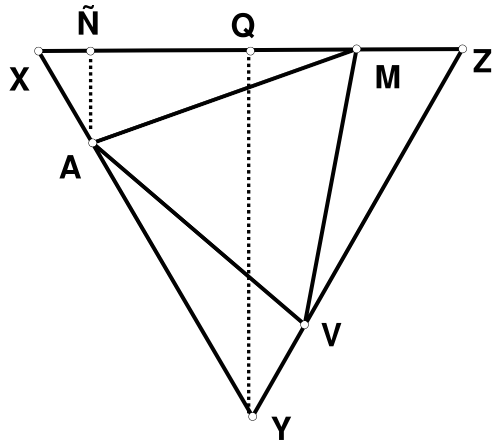
Por lo tanto hay 200-2=198 fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 10.

En conclusión: Hay 1387-198=1189 fracciones que se pueden simplificar.

Problema 5.

Primero, notemos que los triángulos **AXM**, **MZV** y **VYA** son congruentes pues **XA**=**YV**=**ZM**, **XM** = **ZV** = **YA** y **<AXM = <MZV = <VYA.**

Tomemos los puntos **Ñ** y **Q** sobre **XZ** de modo que **AÑ** y **YQ** sean las alturas de los triángulos **XAM** y **XYM** respectivamente.



Los ángulos **<QXA** y **<ÑXA** son iguales a 60°, además los ángulos **<XÑA** y **<XQY** son rectos, así que los triángulos **XAÑ** y **XYQ** son semejantes. Por lo tanto **XÑ** = **XA/2** y **AÑ=YQ/4**.

a) Para calcular el área del triángulo **AVM** es suficiente calcular el área de los tres triángulos congruentes (**AXM**, **MZV** y **VYA**) y restarla a **S**, que es igual a ½**L**(**YQ**)=16**.**

Podemos poner el área del triángulo **AXM** en función **S.**
Dicho área es igual a ½(**XM**)(**AÑ**)=½(¾**L**)(¼**YQ**)=½**L**(**YQ**)(3/16)**=S**(3/16) =(16)(3/16)=3.

Finalmente el área buscado es **S**–3(3)=16-9= 7.

b) Para calcular su perímetro es suficiente calcular la longitud de 3**AM.** Sabemos que **XÑ**=**XA**/2=(¼**XY**)/2=(1/4)(16)/2, y por lo tanto **XÑ**=2. Entonces **ÑM** = 10. Usando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo **XQY** obtenemos que **YQ** es igual a $8\sqrt{3}$. Entonces **AÑ**=$2\sqrt{3}$. Usando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo **AÑM** obtenemos que **AM** = $4\sqrt{7}$, finalmente el perímetro buscado es **12**$\sqrt{7}$.